Características matemáticas y contextuales de la Trigonometría en el repaso para Robótica en Ingeniería Mecatrónica

Diana del Carmen Torres-Corrales
Instituto Tecnológico de Sonora, México
Gisela Montiel-Espinosa
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados, México

Resumen

Reportamos un estudio etnográfico ubicado en un espacio formativo de Ingeniería Mecatrónica; en particular, el acercamiento al momento de *Repaso de la matemática* en una asignatura profesionalizante donde buscamos responder a la siguiente pregunta: ¿qué características matemáticas y contextuales adquieren, en su uso, las nociones trigonométricas cuando el profesor y los estudiantes abordan el repaso para resolver problemas de Robótica Industrial? Desde una perspectiva que centra su atención en las prácticas que acompañan a los objetos matemáticos, identificamos el uso social de cuatro nociones trigonométricas como un saber situado en el escenario compartido y funcional de la Robótica. El rol de los diagramas, la permanencia y funcionalidad de la noción de razón trigonométrica y la ausencia del significado lineal reportado en la literatura son las características que engloban los resultados obtenidos.

Palabras clave

Construcción del conocimiento, Formación de ingenieros, Investigación etnográfica, Matemática Educativa, Trigonometría.

Mathematical and contextual features of Trigonometry in the preliminaries for Robotics in Mechatronics Engineering

Abstract

We report an ethnographic study located in a formative space of Mechatronics Engineering; in particular, the approach to the moment of *mathematics preliminaries* in a professionalizing subject where we seek to answer the following question: what mathematical and contextual characteristics do trigonometric notions acquire, in their use, when the teacher and students approach the preliminaries to solve problems of Industrial Robotics? From a perspective that focuses attention on the practices that accompany mathematical objects, we identify the social use of four trigonometric notions as knowledge situated in the shared and functional scenario of Robotics. The role of diagrams, the permanence, and functionality of the notion of trigonometric ratio, and the absence of the linear meaning reported in the literature are the characteristics that encompass the results obtained.

Keywords

Construction of Knowledge, Engineering Training, Ethnographic Research, Mathematics Education, Trigonometry.

Recibido: 21/11/2020
Aceptado: 05/05/2022

1. Introducción

La formación de ingenieros tiene un enfoque educativo interdisciplinario, por lo que se espera que los conocimientos se acoplen con su quehacer a lo largo del programa de estudios. Así, los programas declaran que los estudiantes deben ser capaces de poner en práctica los conocimientos adquiridos para resolver problemas (Domínguez *et al*., 2019). Por ejemplo, el conocimiento matemático que se estudia en las Ciencias Básicas (primeros dos años) se debe poner en práctica para resolver problemas en las asignaturas de Ciencias de la Ingeniería (segundo y tercer año) y Profesionalizantes (último año, cercanas a la práctica profesional). Sin embargo, la investigación didáctica –aquella particular del estudio de los procesos de enseñanza y aprendizaje de contenidos específicos–, desde diversas disciplinas y enfoques, ha cuestionado la *transferencia* (del aprendizaje) de los conocimientos de las Ciencias Básicas no solo a las asignaturas posteriores, sino –y con mayor énfasis, por ser el propósito de la formación profesional– a los escenarios extraescolares. Desde mediados de los 80, del siglo pasado, miradas como la etnomatemática reconocían que "gran parte de las matemáticas que actualmente practican los ingenieros, principalmente el cálculo, no responde al concepto de rigor y formalismo desarrollado en los cursos académicos de cálculo" (D'Ambrosio, 1985: 45); y en las pasadas décadas las investigaciones centradas en la práctica profesional de la Ingeniería han dado muestra de la importancia de continuar atendiendo este cuestionamiento.

El documento *A Framework for Mathematics Curricula in Engineering Education* de la Sociedad Europea para la Educación en Ingeniería (SEFI, 2013, por sus siglas en francés), es un producto basado en los resultados del proyecto danés KOM (competencias y el aprendizaje de matemáticas, por sus siglas en danés) para sistematizar ocho competencias matemáticas específicas que necesita un ingeniero del siglo XXI, estas son categorizadas en dos bloques de habilidades: (1) preguntar y responder cuestionamientos en y con las matemáticas, y (2) relacionarse con y manejar las herramientas y el lenguaje matemático; este marco de referencia destaca por su utilidad para el diseño de propuestas de contenidos curriculares de ingeniería que ha sido utilizado bajo los enfoques por competencias, modelización matemática y solución de problemas.

En el contexto internacional, la revista *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education* (IJRUME) publica un número especial en el que recopila trabajos en torno a las tendencias de innovación educativa para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en la ingeniería. Se presentan estas tendencias en: (1) la identificación de las necesidades matemáticas en la práctica de la ingeniería (ir del problema ingenieril hacia la matemática que le da solución); (2) el diseño curricular desde el enfoque por competencias; y (3) el estudio teórico basado en praxeologías desde el enfoque de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (Pepin, Biehler y Gueudet, 2021).

Los estudios de casos más recientes en la formación de ingenieros señalan la modelización matemática como punto medular, al grado de identificarla en un grupo de profesores como la principal competencia que debe tener un estudiante para desarrollar madurez matemática (Faulkner, Earl y Herman, 2019), pues argumentan, con ella los estudiantes pueden transitar entre diferentes modelos, extraer el significado de los símbolos, utilizar herramientas computacionales e interpretar dicha solución con el problema que resuelven.

En México, Camarena (2013) desarrolló la teoría de la Matemática en el Contexto de las Ciencias como respuesta a la falta de teorías específicas para el nivel superior y cuya finalidad fue solventar las dificultades para establecer el vínculo entre matemáticas e ingeniería. Dicha teoría busca una reorganización cognitiva de conceptos y procesos matemáticos, de manera que se pretende que el profesor de matemáticas contribuya con su práctica docente a la formación integral del futuro profesionista desde un enfoque por competencias.

Desde la Teoría Antropológica de lo Didáctico, Romo-Vásquez (2014) analiza el uso de modelos matemáticos en contextos de la ingeniería e identifica las necesidades matemáticas que surgen en dicho uso, como las técnicas matemáticas del trabajo de expertos y el uso de programas computacionales para simular situaciones en contexto. La autora concluye que el diseño de actividades didácticas basadas en la modelización matemática para la formación de ingenieros requiere del trabajo colaborativo para elegir y adaptar dichas propuestas.

Desde la Teoría Socioepistemológica, Hinojos y Farfán (2017) analizaron la relación entre los fenómenos de propagación del calor y la transmisión de señales eléctricas. Así, mediante un análisis histórico-epistemológico de las obras de Fourier, Ohm y Maxwell, identificaron que la estructura de la ecuación diferencial que representa a los fenómenos y su solución en estado estacionario es idéntica en los tres casos, pero se diferencia por el significado físico de sus coeficientes. Posteriormente, los autores retoman este resultado para elaborar el diseño de una propuesta didáctica basada en las analogías entre los problemas físicos del calor y la electricidad, cuya finalidad es la construcción de las nociones del estado estacionario en el contexto de la Electrónica de Potencia para una población de estudiantes de Ingeniería Eléctrica, la cual puede consultarse a detalle en Hinojos, Farfán y Orozco (2021).

La tradición de la Teoría Socioepistemológica en este tipo de investigaciones delimita sus objetos de estudio en torno a un saber matemático en particular y las prácticas que le anteceden y acompañan, para estar en condiciones, posteriormente, de construir explicaciones sobre sus procesos de construcción social y hacer propuestas de rediseño del discurso Matemático Escolar. En esta dirección, se diseñó una investigación cuyo planteamiento y fundamentación teórico-metodológica puede consultarse a detalle en Torres-Corrales, López-Acosta y Montiel (2020), y cuyo objeto de estudio se centró en los usos y significados del conocimiento trigonométrico de estudiantes de Ingeniería Mecatrónica en Robótica Industrial pertenecientes al Instituto Tecnológico de Sonora, una universidad pública autónoma ubicada en el noroeste de México.

Se trató de un estudio etnográfico que demandó de la recolección y análisis de datos en dos etapas, una documental y otra *in situ*. Con la etapa documental se identificó que a pesar de la articulación curricular (seis asignaturas que van de primero a último año) del problema cinemático directo de la Robótica, se da una *desarticulación de usos de conocimiento* porque hay características de la puesta en práctica de las nociones trigonométricas que están ausentes en su enseñanza en las asignaturas de Matemáticas (Torres-Corrales y Montiel, 2020).

La etapa *in situ* consistió en un trabajo de campo realizado durante un semestre con 47 estudiantes (42 hombres y 5 mujeres) y un profesor de Ingeniería Mecatrónica en la asignatura de Robótica Industrial (séptimo semestre); y en este se identificaron dos momentos relevantes: *el repaso de la matemática y la solución del problema cinemático directo*. El análisis de la etapa *in situ* se guio por la pregunta de investigación: ¿qué usos de las nociones trigonométricas se dan en la Ingeniería Mecatrónica cuando los estudiantes resuelven problemas de la Robótica?, pero el reconocimiento de dichos momentos nos llevó a reportarlos por separado.

El estudio correspondiente a la solución del problema cinemático para un robot SCARA (brazo robótico para ensamble de confianza selectiva, por sus siglas en inglés) giró en torno al proceso de modelación matemática registrado con técnicas etnográficas, donde se identificó que los diagramas –herramienta de la Robótica– son un componente fundamental del uso del conocimiento matemático (nociones trigonométricas), en particular en la determinación de la posición en la circularidad. Los resultados de este momento se pueden consultar en Torres-Corrales y Montiel (2019).

El estudio del momento de *Repaso* corresponde con lo que reportamos en el presente artículo. Dado que se reconoció que este repaso iba más allá de recuperar los contenidos de las Ciencias Básicas y sintetizarlos antes de abordar el contenido de la asignatura Profesionalizante, además de la pregunta de investigación inicial, se planteó la siguiente pregunta: *¿qué características matemáticas y contextuales adquieren, en su uso, las nociones* *trigonométricas cuando el profesor y los estudiantes abordan el repaso para resolver problemas de Robótica Industrial?*

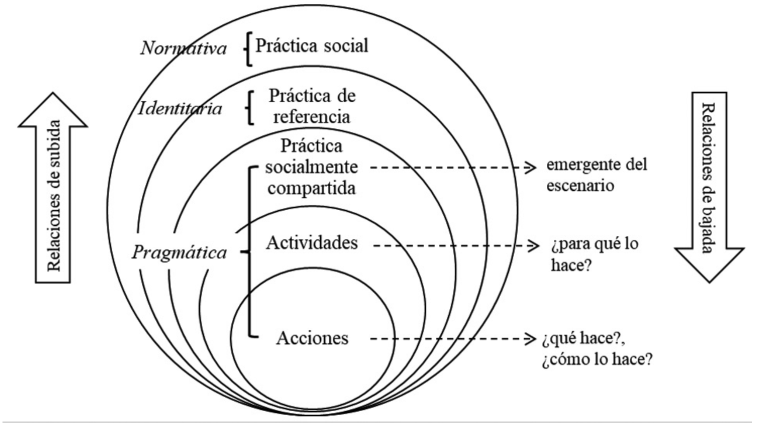
Poner énfasis en el momento del *repaso de la matemática* resultó de interés a propósito del análisis de la etapa documental donde identificamos la desarticulación de usos del conocimiento trigonométrico entre los contenidos de las Ciencias Básicas y las Ciencias de la Ingeniería, y entre las Ciencias Básicas y las asignaturas Profesionalizantes, que se sintetizan en los distintos roles que tienen los diagramas a medida que se transita por el currículo, pues los diagramas en las asignaturas de Matemáticas juegan el rol de representación ilustrativa de la cual se obtienen datos para realizar los cálculos y en estos recae el mayor énfasis de la actividad matemática. En este sentido, la forma en que el profesor aborda el *repaso* puede aportar a articular y robustecer los contenidos trigonométricos en las Ciencias Básicas con elementos contextuales y propios de la ingeniería.

En su conjunto, estos resultados son la aportación de una investigación con una perspectiva particular, que entiende el hacer matemáticas como una actividad humana situada y contextualizada; por ello, sin dejar de atender los objetos matemáticos, se prioriza el estudio de las prácticas que los acompañan y se eligen estrategias metodológicas que permitan su estudio culturalmente situado, en este caso, en la Ingeniería Mecatrónica.

2. Fundamento teórico

La Teoría Socioepistemológica (TS) nace como un enfoque sistémico que integró la dimensión social al estudio del sistema didáctico, centrado hasta entonces en las relaciones entre estudiantes (dimensión cognitiva), profesor (dimensión didáctica) y saber matemático (dimensión epistemológica) (Cantoral y Farfán, 2003). El reconocimiento de la matemática al servicio de otras disciplinas –principalmente por las investigaciones realizadas en la educación superior– y de su carácter social como resultado de la actividad humana dieron pauta a la investigación socioepistemológica en escenarios diversos (escolares, históricos, profesionales, experimentales, etc.) y con ello el desarrollo de diferentes programas de investigación, que sostienen en sus bases el interés por develar los *usos del conocimiento matemático* que se han invisibilizado en la matemática escolar. Para lograrlo, se cambió el estudio del dominio de los conceptos matemáticos por el estudio de las prácticas que acompañan su producción, la denominada *descentración del objeto* (Cantoral, Montiel y Reyes-Gasperini, 2015). Con base en la evidencia empírica, se propone un modelo (figura 1) que explica la construcción social de conocimiento matemático en términos de prácticas organizadas (anidadas); es decir, refiere a prácticas matemáticas relativas a un saber.

•**Figura 1.** Modelo de anidación de prácticas. Adaptado de (Cantoral, Montiel y Reyes-Gasperini, 2015: 13)



Al ser una teoría dentro del paradigma social, la TS tiene una perspectiva situacional de la construcción de conocimiento y reconoce como fundamental el rol del contexto que la enmarca, en particular la forma en la cual un individuo o grupo –como miembro(s) de una cultura– construye(n) conocimiento, por lo que se establece un principio de *racionalidad contextualizada* (Cantoral, Montiel y Reyes-Gasperini, 2015). Torres-Corrales y Montiel (2020: 32-33) proponen tres niveles de análisis para dar cuenta de esta dependencia del contexto:

> el *contexto cultural* da pertenencia a grupos humanos específicos pues se reconoce su dominio en el comportamiento e interacciones sociales de los sujetos o grupos involucrados; mientras que el *contexto situacional* reconoce la influencia del tiempo, el lugar y las condiciones donde se lleva a cabo la actividad matemática, dichas condiciones las determina el problema que se estudia o pueden ser establecidas mediante un diseño didáctico. El contexto que da forma y sentido a la matemática en juego, lo denominamos *contexto de significación*.

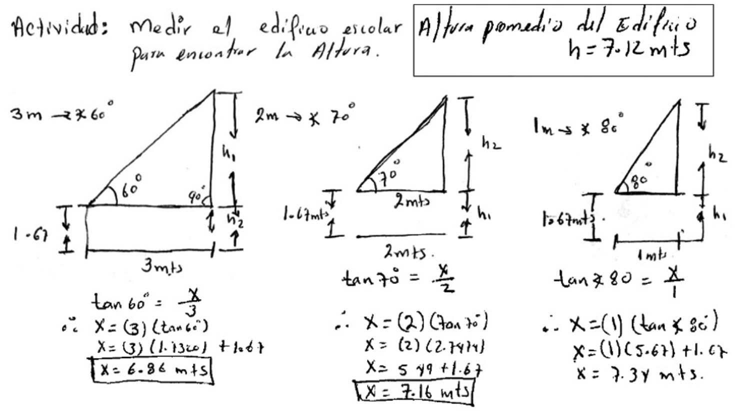
Así, las investigaciones socioepistemológicas darán cuenta de anidaciones de prácticas contextualizadas, acordes a los objetos de estudio y escenarios de investigación planteados. Para el presente estudio, con el objetivo de responder a la pregunta de investigación, utilizaremos los dos primeros niveles del modelo de anidación de prácticas: la *acción* directa de la persona (individual y en grupo) ante el medio material (escenario), organizacional (contexto) y social (normativo), y su organización en *actividad* situada socioculturalmente (Cantoral, Reyes-Gasperini y Montiel, 2014). Esto por tratarse de prácticas de naturaleza observable y explícita al seno de las cuales podemos identificar el *uso social* del objeto matemático de interés, esto es, el saber situado en escenarios socioculturales, que debe ser compartido y funcional (Tuyub y Buendía, 2017; Torres-Corrales y Montiel-Espinosa, 2021).

2.1 Consideraciones epistémicas

Dentro de las investigaciones socioepistemológicas relativas al conocimiento trigonométrico, ubicamos la presente en el momento de desarrollo de usos que Montiel (2011), a partir de un estudio histórico-epistemológico, identifica como la *relación trigonométrica* y en el que reconoce el origen y la significación del saber trigonométrico como el entendimiento de la naturaleza de la relación entre un ángulo central y la longitud de la cuerda que subtiende en un círculo, situado en prácticas de modelación geométrica de los fenómenos astronómicos. Esto implica la transición de una realidad no manipulable a un modelo o representación: el tránsito de lo macro a lo micro.

La investigación de Montiel y Jácome (2014) evidenció que en la escuela domina un tratamiento aritmético y algebraico de las razones trigonométricas, las nociones y representaciones geométricas incluidas en las tareas sirven de ilustraciones –porque no se construyen o se miden– de donde tomar los datos que se sustituyen en las fórmulas; los problemas que se gestan en este contexto son lo que estos autores denominaron como *significado lineal*: la concepción y tratamiento lineal de la relación entre ángulo y cateto en un triángulo rectángulo, por ejemplo, relacionando crecimientos constantes del ángulo –diez en diez grados– con decrecimientos constantes del cateto –uno en un metro– (figura 2).

• **Figura 2.** Significado lineal de la razón trigonométrica en profesores del nivel medio superior. Adaptado de Jácome (2011: datos recolectados)



Esta confrontación inicial entre la epistemología de prácticas construida de la génesis histórica del saber y los procesos de transmisión didáctica vía la escuela, permitió diseñar herramientas de análisis crítico de las prácticas en torno a lo trigonométrico, tomando en consideración "la medición y la proporcionalidad, los procesos de construcción geométrica, el análisis de la relación 'ángulo–longitud en el triángulo o cuerda en el círculo', la modelación para el paso de lo macro a lo micro" (Cantoral, Montiel y Reyes-Gasperini, 2015: 21).

Investigaciones de diseño (Torres-Corrales, 2014; Scholz, 2014; Cruz-Márquez, 2018) mostraron que diversas variables contextualizaban la actividad geométrica cuando esta se provocaba intencionalmente en la resolución de tareas trigonométricas en diferentes contextos y niveles educativos –ingeniería, nivel medio con escenarios experimentales innovadores y formación inicial docente, respectivamente–. Sus resultados ampliaron el planteamiento del *contexto de significación geométrica* general de Montiel (2011), por ejemplo, yendo más allá de las construcciones geométricas; se reconoció el rol relevante de los modelos en contexto (diagramas o bosquejos con elementos de la situación problema a modelar) y de los modelos geométricos a escala, fueran realizados en computadora (*software*) o por instrumentos geométricos tradicionales (regla, compás y transportador). El análisis de la relación ángulo-longitud se robusteció con el planteamiento de la angularidad (Rotaeche y Montiel, 2017), y se situó el uso de la medida del ángulo (como cualidad, relación y cantidad), en grados o radianes, según el contexto de uso y su funcionalidad.

Es en este sentido que se plantea, desde la Socioepistemología, que *lo trigonométrico* se construye en y desde un campo de prácticas, no se da como un objeto preestablecido, por ejemplo, la razón trigonométrica (Torres-Corrales y Montiel-Espinosa, 2021).

3. Método etnográfico

La investigación etnográfica atiende problemas a nivel microscópico, por lo que se orienta a las particularidades de lo local y en entender lo que un grupo humano produce e interpreta de su quehacer (Geertz, 2006). Si bien se adoptó una perspectiva realista de la etnografía, en el sentido de Hammersley y Atkinson (1994), que busca comprender los efectos de la presencia de la investigadora –primera autora del artículo– en el actuar de los participantes; ella forma parte de la comunidad académica de la universidad (egresada y profesora) de tal suerte que conocía y compartía el contexto académico particular de la Ingeniería donde se situó la recolección de datos.

Participaron de manera voluntaria e informada estudiantes de séptimo semestre de Ingeniería Mecatrónica y su profesor –con grados de licenciatura, maestría y doctorado afines a la disciplina– durante el semestre agosto-diciembre 2018 en la asignatura de Robótica Industrial (teoría y laboratorio). *El repaso de la matemática* por parte del profesor tuvo una duración de seis horas de clase y durante este momento de la investigación se utilizó la técnica de observación participante, de la cual se elaboraron tres cuadernos de notas, un diario de campo y se grabaron audios con sus respectivas transcripciones. Aunado a esto, se utilizó la técnica de grupos de discusión para conversar con los estudiantes, cuya duración fue de 7 horas y 40 minutos y se elaboraron tres reportes con sus respectivas transcripciones de audios y videos. Para los grupos de discusión, por ser extraclase, solo pudieron participar nueve estudiantes (ocho hombres y una mujer), cuyas producciones son las que se analizan para efectos de reportar toda la etapa del *repaso*.

Con la observación participante se estudió el quehacer de la Ingeniería Mecatrónica desde su contexto natural de producción asumiendo un rol no oculto con grado de implicación pasiva-moderada-activa (acorde a lo propuesto por Hammersley y Atkinson, 1994; y Penalva *et al*., 2015), según se daba familiaridad con los participantes.

Para la observación participante se empleó un cuaderno de notas y un diario de campo, cuyo contenido incluye datos generales (fecha, hora, lugar, cantidad de estudiantes y temas), proceso de la sesión (rol del profesor y de los estudiantes), conocimientos matemáticos y disciplinares, reacciones de la comunidad (comportamiento y actitudes), anotaciones de la sesión, fotografías y transcripciones de audio y video; con el cuaderno de notas se registraron individualmente las sesiones y con el diario de campo sintetizamos la agrupación de varios cuadernos de notas.

El grupo de discusión permitió generar un rango amplio de opiniones y experiencias de los estudiantes respecto a las preguntas del guion, el cual nos permitió ampliar y contrastar los datos de la observación participante (Fàbregues y Paré, 2016). El guion se organizó en tres apartados: introducción (bienvenida y definición de reglas y roles), discusión (preguntas) y disolución (agradecimiento); también se incluyeron datos generales, fotografías y transcripciones de video.

Los grupos de discusión se realizaron en diferentes días, dadas las recomendaciones de la técnica. La dinámica consistió en responder una a una las preguntas del guion que condujo la investigadora en rol de moderadora. En el caso de los estudiantes se identificó un grupo homogéneo porque las repuestas no fueron repetitivas, sino que, dada la respuesta de un compañero, los demás ahondaban en detalles si consideraban que había faltado información.

4. Resultados y análisis

Dada la cantidad de datos registrados con las técnicas e instrumentos se realiza el análisis a través de episodios, estos se configuraron de acuerdo con cuatro temas: la matriz de rotación, la matriz de cambio de coordenadas, los valores de seno y coseno del ángulo, y las identidades trigonométricas. Los temas de matrices fueron impartidos dentro del *repaso de la matemática*, estrategia de academia para reducir el índice de reprobación, porque algunos estudiantes declaran "no recordar la matemática", el cual incluyó temas de Álgebra Lineal; adicionalmente se incluyen los dos temas restantes como parte del *repaso*, porque, si bien estuvieron presentes dentro de otros temas de la Robótica a lo largo del semestre, también fueron estudiados en las asignaturas de Matemáticas.

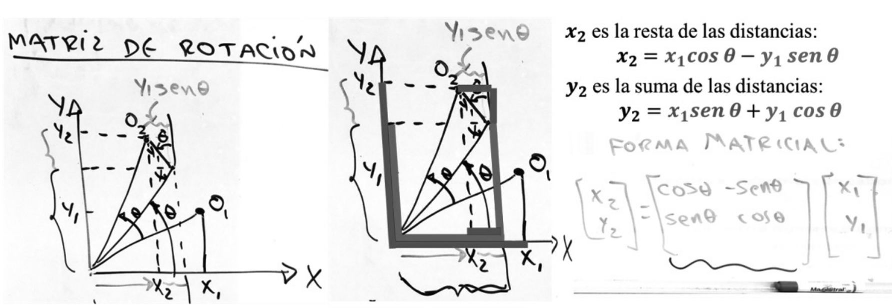
Los episodios de los participantes se organizaron de acuerdo con los cuatro temas matemáticos señalados. Los datos de la *explicación del profesor* (discurso verbal y escrito) provienen del registro de los cuadernos de notas y diarios de campo obtenidos con la técnica de observación participante llevada a cabo durante las clases de Robótica Industrial. Mientras que los datos de la *exploración del estudiante y moderadora* provienen de lo que los estudiantes entienden (discurso oral y escrito) respecto a la explicación de clases de su profesor referente a los cuatro temas matemáticos, los cuales se registraron mediante los guiones de la técnica de grupo de discusión.

El análisis se organiza en un cuadro que contiene tres secciones: (1) los episodios de los participantes: explicación del profesor durante las clases y exploración de cómo entienden los estudiantes dichas explicaciones; (2) las herramientas de análisis crítico de las prácticas en torno a lo trigonométrico (apartado 2.1): figuras, trabajo geométrico, tipo y rol del diagrama, usos del ángulo y covariación; y (3) el análisis de la puesta en uso de lo trigonométrico (apartado 2): acciones, actividades y contextos (cultural, situacional y de significación). Por cuestiones de extensión se muestra el análisis detallado de un tema y del resto una síntesis individual.

4.1 Matriz de rotación

El profesor explicó la matriz de rotación con un diagrama en el plano cartesiano que representa el giro sucesivo de dos puntos de una articulación rotacional del robot a medida que se mueve (fotografía 1).

•Fotografía 1. Matriz de rotación explicada por el profesor en el pizarrón



En los grupos de discusión, la moderadora pidió a los estudiantes que "explicaran cómo se forma la matriz de rotación y su significado en el movimiento del robot", con la intención de identificar si hacían relaciones, reconocían que se trataba de triángulos semejantes y rectángulos, y si señalaban hipotenusa, catetos y ejes. Los estudiantes señalaron que "las matrices se forman de acuerdo con el ángulo de referencia del triángulo rectángulo, donde asocian al ángulo como un giro y este define al seno y al coseno del ángulo dependiendo del cuadrante donde se ubique" (fotografía 2).

• **Fotografía 2.** Explicación de la estudiante EM1 sobre el ángulo como giro

Algunos episodios del estudio de la matriz de rotación por parte del profesor (P), de los estudiantes hombre y mujer (EH/EM) y de la moderadora (M) con su respectivo análisis se muestran en el cuadro 1; se señalan algunas notas aclaratorias en paréntesis.

• **Cuadro 1.** Análisis cualitativo de la matriz de rotación referente a la fotografía 1

Sección I. Episodios de los participantes	
Explicación del profesor	*Exploración del estudiante y moderadora*
Extracto de audios 15 y 16	Extracto del video 21
» P. En la matriz de rotación se tiene un punto en el sólido 0_1 y gira un ángulo θ, pero sigue siendo la misma magnitud, y se va a mover al punto 0_2. Por ejemplo, en el robot, esta parte es un triángulo rectángulo y es parte de un sólido rígido. » P. Si esta es mi hipotenusa hagan de cuenta que tengo un triángulo semejante y este ángulo que estaba aquí en la vertical al hacer esto es el mismo ángulo, sería $y_1 sen\ \theta$, pero negativo porque le tengo que restar este pedacito.	» EM1. Pues yo le puse que dependían, o sea, las ecuaciones (*de las matrices*), de dónde estaba el ángulo, de qué cateto estaba (*del triángulo rectángulo*), entonces, dependiendo de eso tú sabías si era positivo o negativo (*cuadrante del plano*), entonces le puse que x_2 era la resta de las distancias y y_2 la suma de las distancias. » M. Entonces, en el triángulo de arriba, ¿imaginan un nuevo eje? » Todos. ¡Sí! (*risas*).

Sección I. Episodios de los participantes

» P. En función de θ_1 y luego de θ_2, y así sucesivamente. Este triángulo va a tener aproximaciones sucesivas, la computadora lo va a hacer de grado en grado o de décima de grado en décima de grado cada vez que se esté moviendo.

» P. En el caso de la matriz de rotación en coordenadas homogéneas, el 1 en *z* significa que pivotó o giró un ángulo θ alrededor de *z*. También significa la perspectiva, el valor o magnitud real; si fuera 2 sería ½ como en el caso del *zoom* de las cámaras fotográficas, pero en el caso de la Robótica es 1.

» Extracto de lo escrito

» El procedimiento por seguir depende de la forma en que la rotación venga definida. Cuando está determinada por tres rotaciones $\theta,,\phi,\Psi$ alrededor de los ejes *z,y,x*, respectivamente, cada una de ellas queda representada mediante las matrices, por ejemplo, para el eje *z* :

$$[R_\theta, z] = \begin{bmatrix} \cos\theta & -sen\,\theta & 0 & 0 \\ sen\,\theta & cos\,\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

» EM1. Sí, porque si estuviera del otro lado, ya tuviera su otro eje, ya no fuera igual, y el ángulo que también quieres porque no es lo mismo porque va aumentando (*señala con su mano un decrecimiento*).

Extracto del video 25

» EH5. La matriz de rotación, respecto al movimiento del robot, expresa el ángulo que se desplazó.

» M. ¿Entonces todos los triángulos que estamos viendo son rectángulos?

» EH5. Sí, porque si no, no se podría aplicar esta (*señala la razón seno del ángulo*), sino las leyes (*trigonométricas*).

Extracto del video 28

» EH6. Observamos primeramente la distancia, y ya al momento de (*señala con sus manos el movimiento de giro*), lo ponemos en función del ángulo.

» EH7. Es la distancia por el valor del ángulo en cada eje.

Sección II. Herramientas de análisis crítico de las prácticas en torno a lo trigonométrico

Figuras	Triángulo	X	Círculo		Articular figuras		Identificar elementos/ propiedades			X
Trabajo geométrico	Medir	X	Hacer relaciones	X	Cuantificar relaciones	X	Construir diagramas	X	Analizar diagramas	X
Tipo y rol del diagrama	Bosquejo	X	Modelar situación	X	Entender problema		Desarrollar ecuaciones			X
	Escala				Dar solución		Justificar solución			X
Usos del ángulo	Carácter estático		Carácter dinámico	X	Cualidad	X	Cantidad	X	Relación	X
Covariación	Ángulo-cuerda		Ángulo-cateto	X						

Sección III. Análisis de la puesta en uso de lo trigonométrico

» ***Acciones*** *(¿qué hacen?, ¿cómo lo hacen?)*

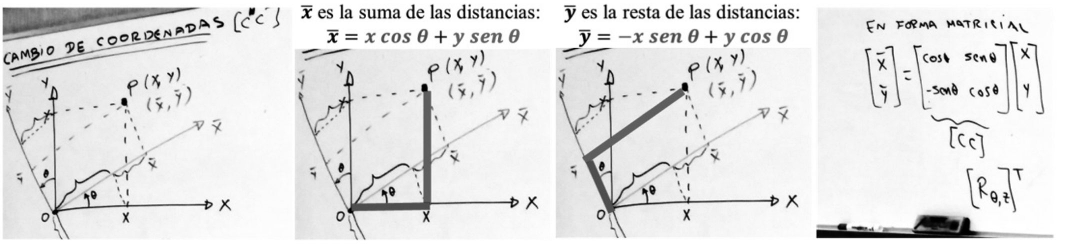
» Construyeron un diagrama en bosquejo y con referencia al plano cartesiano, que incluye triángulos semejantes, en este caso dos triángulos rectángulos, hicieron movimientos circulares y relaciones con métricas (relación cateto-cateto) de dos giros sucesivos de una articulación rotacional del robot.

Sección III. Análisis de la puesta en uso de lo trigonométrico
» Reconocieron los elementos constitutivos de los triángulos rectángulos: ángulo recto, catetos e hipotenusa.
» Desarrollaron la matriz de rotación para el caso bidimensional, a través del análisis del diagrama (fotografía 1) y el establecimiento de las ecuaciones de x_2 y y_2 con las razones de seno y coseno del ángulo, de donde estudiaron la covariación de la relación cateto-cateto de los triángulos y justificaron que podían emplear las razones porque son triángulos rectángulos.
» Se dan los tres usos del ángulo: como cualidad, cuando señalaron una curva que indica la convención positiva del ángulo (giro antihorario); como relación, cuando visualizaron el ángulo de interés con relación al eje *x* o *y*, y como cantidad de tipo variable. En estos usos se resalta su carácter dinámico porque estudiaron dos giros al elaborar el diagrama y saben que está en movimiento.
» ***Actividad*** *(¿para qué lo hacen?)* Modelar los valores de los ángulos sucesivos que puede tomar una articulación rotacional del robot dado el movimiento al que se somete, donde se conserva la misma magnitud de la longitud de la articulación.
» Contextos (*cultural* da pertenencia al grupo humano; *situacional* las condiciones donde se realiza la actividad matemática; y *de significación* que da forma y sentido a la matemática). » Contexto cultural: el rol de la Robótica Industrial y su influencia en la funcionalidad de la matemática.
» Contexto de situacional: las matrices se forman de acuerdo con el ángulo de referencia del triángulo bajo estudio, donde asocian al ángulo como giro y este define a las razones de seno y coseno del ángulo.
» Contexto de significación: el movimiento de las articulaciones rotacionales de los robots –los giros sucesivos a medida que se mueve– en tanto da forma y sentido a la matemática en uso; por integrar de forma implícita al círculo.

4.2 Matriz de cambio de coordenadas

El profesor explicó con un diagrama en el plano cartesiano que la matriz de cambio de coordenadas representa otra perspectiva de la rotación: el giro sucesivo del sistema de coordenadas referencial cuando el punto de una articulación rotacional del robot permanece fijo (fotografía 3). En los grupos de discusión con los estudiantes, la moderadora les preguntó “¿qué hace el robot en la parte de control al accionar el botón *Coord* del *teach pendant* (control remoto)?” con la intencionalidad de cerciorarse de que identifican los tres tipos de movimiento del robot *(joint, world y tool)*, y de que matemáticamente significa que el punto no se ha movido, sino que cambió el sistema de coordenadas (el cambio de renglones por columnas y la transpuesta de la matriz de rotación). Los estudiantes señalaron que “se da un sistema de coordenadas que se ha movido un ángulo y para formar la matriz lo que importa es el ángulo que se desplazó, el cual es un giro, y define al seno y al coseno dependiendo del eje donde esté”.

• **Fotografía 3.** Matriz de cambio de coordenadas explicada por el profesor en el pizarrón

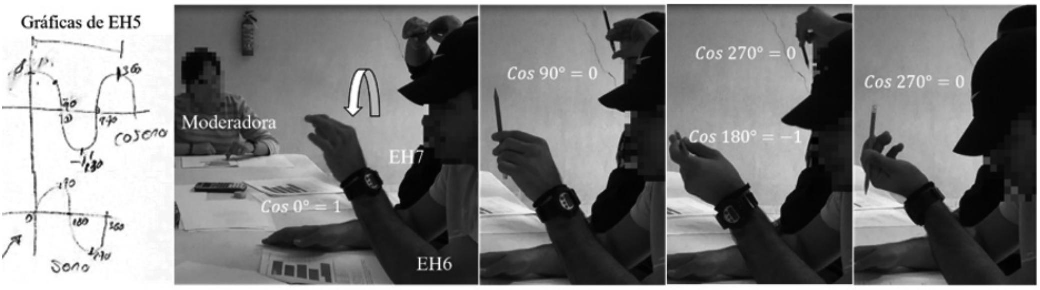


Del análisis de la puesta en uso de lo trigonométrico se identifica que la *actividad* (¿para qué lo hacen?) es modelar el cambio de perspectiva de la matriz de rotación y calcular los valores de los ángulos sucesivos de las articulaciones del robot en cualquier eje en el espacio. Aquí, se identifica, en el *contexto cultural*, el rol de la Robótica Industrial y su influencia en la funcionalidad de la matemática; el *contexto situacional* se reconoce en las particularidades del movimiento del robot, los modos *joint* (sistema de coordenadas en cada articulación), world (sistema de coordenadas en la base) y *tool* (sistema de coordenadas en la herramienta); y, finalmente, el *contexto de significación* está enmarcado por el movimiento de las articulaciones rotacionales de los robots cuando el punto de una articulación rotacional permanece fijo, en tanto da forma y sentido a la matemática en uso, por integrar de forma implícita al círculo.

4.3 Valores de seno y coseno del ángulo

Al realizar operaciones con matrices, tanto el profesor como los estudiantes evocaron de memoria algunos valores de seno y coseno del ángulo: 0°, 30°, 45°, 60°, 90°, 180°, 270° y 360°. Para explorar de dónde reconocen dichos valores, en una entrevista individual se le preguntó al profesor al respecto, quien dijo "tengo en mi mente la imagen del círculo unitario y de triángulos rectángulos para determinar esos valores". Con la intención de identificar cómo los estudiantes identifican los valores se les solicitó llenar una tabla (fotografía 4). Para la parte 1 los estudiantes no utilizaron calculadora y explicaron que los valores "provienen de gráficas de funciones de seno y coseno" (ver gráficas de EH5) y de valores del círculo unitario (movimientos con el lápiz de EH6 y EH7). Mientras que para la parte 2 utilizaron la calculadora y dijeron que los valores "se pueden calcular a partir del ángulo que se estudie en el triángulo rectángulo y cuyo signo depende del cuadrante".

- **Fotografía 4.** Explicación de los estudiantes sobre los valores de seno y coseno del ángulo



Parte 1		Parte 2	
$cos\ (0°) = 1$	$sen\ (0°) = 0$	$cos\ (30°) = \frac{\sqrt{3}}{2} = 0.866$	$sen\ (30°) = \frac{1}{2} = 0.5$
$cos\ (90°) = 0$	$sen\ (90°) = 1$	$cos\ (45°) = \frac{\sqrt{2}}{2} = 0.707$	$sen\ (45°) = \frac{\sqrt{2}}{2} = 0.707$
$cos\ (180°) = -1$	$sen\ (180°) = 0$	$cos\ (-45°) = \frac{\sqrt{2}}{2} = 0.707$	$sen\ (-45°) = -\frac{\sqrt{2}}{2} = -0.707$
$cos\ (270°) = 0$	$sen\ (270°) = -1$	$cos\ (60°) = \frac{1}{2} = 0.5$	$sen\ (60°) = \frac{\sqrt{3}}{2} = 0.866$
$cos\ (360°) = 1$	$sen\ (360°) = 0$		

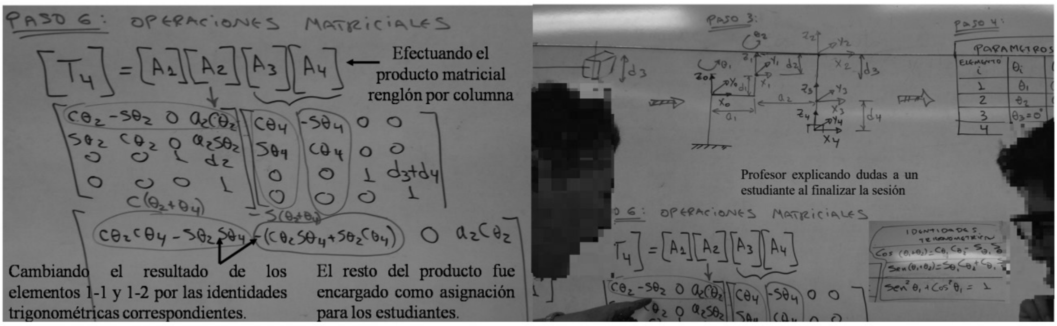
Nota: Escribieron en decimales EH3, EM1, Y EH7; y en fracciones EH4 y EH5

Del análisis de la puesta en uso de lo trigonométrico se identifica que la *actividad* (¿para qué lo hacen?) es realizar –manualmente– operaciones con las matrices que modelan el problema cinemático directo de robots. Aquí, se identifica, en el *contexto cultural*, el rol de la Robótica Industrial y su influencia en la funcionalidad de la matemática; el *contexto situacional* se reconoce que realizan las operaciones con matrices de valores conocidos de seno y coseno del ángulo a modo de validación para que al desarrollar la matriz de transformación lineal la computadora efectúe los cálculos para todos los valores que puede tomar el robot; y, finalmente, el *contexto de significación* está dado por la permanencia de los valores de seno y coseno en la matriz de transformación lineal, aunque cambie el tamaño de los eslabones del robot, por integrar de forma explícita herramientas de la Trigonometría (triángulo, círculo y gráficas trascendentes).

4.4 Identidades trigonométricas

Cuando el profesor explicó problemas de cinemática directa durante las clases, cambió algunos elementos de la matriz de transformación lineal por identidades trigonométricas, según aplicó (fotografía 5). En los grupos de discusión la moderadora les preguntó a los estudiantes "¿para qué utilizan las identidades trigonométricas? (por ejemplo, $cos^2\theta + sen^2\theta = 1$)", con la intencionalidad de identificar si mencionaban lo que dijo el profesor respecto a su uso en la cinemática directa: "permiten el balance entre el tiempo de la parte mecánica y de control del robot".

• **Fotografía 5.** Identidades trigonométricas que explica el profesor a un estudiante hombre



Del análisis de la puesta en uso de lo trigonométrico se identifica que la *actividad* (¿para qué lo hacen?) es simplificar las operaciones matriciales que ejecuta el control y así se dé un balance con el tiempo de respuesta de la parte mecánica del robot. Se identifica, en el *contexto cultural*, el rol de la Robótica Industrial y su influencia en la funcionalidad de la matemática; el *contexto situacional* se reconoce que las partes del robot (control y mecánica) trabajan en diferentes tiempos; y, finalmente, el *contexto de significación* se identifica en el reconocimiento de las identidades trigonométricas que pueden sustituirse en la matriz de transformación lineal al integrar con la simbología de la Robótica el uso de las identidades trigonométricas.

5. Discusión

La triangulación entre las técnicas etnográficas, los datos de los participantes registrados en los instrumentos (cuadernos de notas, diarios de campos y guiones) y el control cruzado de las investigadoras para realizar el análisis cualitativo de los cuatro temas matemáticos en distintos momentos, nos da la confiabilidad del análisis de resultados.

Las técnicas etnográficas de observación participante y grupos de discusión nos permitieron registrar de manera sistematizada las producciones naturales de los participantes de la etapa *in situ*, por lo que, a diferencia de las investigaciones de diseño en la línea de lo trigonométrico (Torres-Corrales, 2014; Scholz, 2014; Cruz-Márquez, 2018), la actividad matemática no fue provocada intencionalmente, sino que emerge del propio problema que se busca resolver.

El análisis cualitativo de los temas del *repaso* nos permitió recrear, en la sección I, los episodios de los participantes donde pusieron en uso las nociones trigonométricas. Posteriormente, con la sección II analizamos los episodios con las herramientas críticas de sus prácticas, organizadas en cinco categorías (figuras, trabajo geométrico tipo y rol del diagrama, usos del ángulo y covariación), donde lo relevante fue identificar los contenidos matemáticos puestos en uso más que recabar la presencia o ausencia de estos, ya que cada tema del repaso posee una funcionalidad particular del escenario de la Robótica. Finalmente, en la sección III, retomamos las dos secciones previas para hacer un reconocimiento de las *acciones* (¿qué hacen?, ¿cómo lo hacen?), *actividades* (¿para qué lo hacen?) y *contextos* (cultural, situacional y de significación) de la puesta en uso de lo trigonométrico.

Con el análisis de los episodios, se realiza ahora un análisis transversal –del *repaso de la matemática*, de forma integral– para construir los argumentos que respondan a la pregunta de investigación: *¿qué características matemáticas y contextuales adquieren, en su uso, las nociones trigonométricas cuando el profesor y los estudiantes abordan el repaso para resolver problemas de Robótica Industrial?* Para ello, generamos un concentrado de cada tema del repaso, organizándolo en dos tablas: (1) de las herramientas de análisis crítico de las prácticas en torno a lo trigonométrico; y (2) de las actividades y los contextos. De esta manera, manifestamos metodológicamente el análisis de las prácticas de naturaleza observable y explícita del profesor y los estudiantes de la Ingeniería Mecatrónica, de donde reconocemos el *uso social* del objeto matemático de interés, las nociones trigonométricas, como un saber situado en el escenario compartido y funcional de la Robótica (cuadro 2).

• **Cuadro 2.** Síntesis del análisis cualitativo del repaso de la matemática

Noción trigonométrica	Características matemáticas	Características contextuales
Matriz de rotación	La matriz se forma de acuerdo con el ángulo de referencia del triángulo rectángulo, donde asocian al ángulo como un giro y este define a las razones de seno y coseno.	Representa el giro sucesivo de dos puntos de una articulación rotacional del robot.
Matriz de cambio de coordenadas	La matriz de cambio de coordenadas se forma al cambiar las filas y las columnas de la matriz de rotación, y es válida porque se trata de matrices ortogonales, donde la matriz inversa es igual a su transpuesta.	Representa otra perspectiva de la rotación, el giro sucesivo del sistema de coordenadas referencial cuando el punto de una articulación rotacional permanece fijo.

Noción trigonométrica	Características matemáticas	Características contextuales
Valores de seno y coseno de ángulos	Los valores provienen de la Trigonometría –triángulo rectángulo, círculo unitario y gráficas de funciones de seno y coseno del ángulo– y permanecen iguales al formarse el mismo ángulo.	Permanencia de los valores de senos y cosenos del ángulo sin importar el tamaño de los eslabones del robot.
Identidades trigonométricas	Las identidades tienen la función de simplificar las operaciones matriciales.	Ejecución eficiente de las operaciones matriciales por parte del control del robot para que la parte mecánica trabaje en balance.

Respecto al estudio histórico-epistemológico de Montiel (2011), a diferencia del escenario de la Astronomía, donde se transita de una realidad macro-no manipulable de los cuerpos celestes a un modelo geométrico (a escala), en la Robótica se transita de una realidad micro-manipulable del robot mediante el *teach pendant* (controla su movimiento) a un modelo en bosquejo (diagrama). Además, aunque en ambos escenarios se requiere la modelación geométrica para manipular el modelo, en la Astronomía se pone en uso un modelo predictivo de la posición y orientación del cuerpo celeste, y en la Robótica se pone en uso un modelo de control que permite especificar la tarea (movimientos) que el robot debe realizar.

De acuerdo con las características contextuales propias del escenario de la Robótica, para los temas de matriz de rotación y matriz de cambio de coordenadas, se pone en uso la noción de razón trigonométrica. Esto se argumenta a partir de la identificación implícita de la división de longitudes provenientes de las razones de seno y coseno del ángulo, ahora acompañada con el estudio del movimiento circular en los diagramas que modelan casos particulares de la situación del robot. Por lo que se estudia la covariación del ángulo-cateto, y con las matrices se calcula con exactitud el conjunto de valores sucesivos de los ángulos a medida que las articulaciones rotacionales del robot giran, conservando la misma magnitud del vector.

Respecto al tema de los valores de seno y coseno del ángulo, el profesor y los estudiantes los identifican como cantidades trigonométricas al expresar que provienen del triángulo rectángulo, círculo unitario y funciones trascendentes de seno y coseno del ángulo, y corresponden con cantidades no proporcionales. Esta interacción no se discute en la matemática escolar porque se atiende la razón trigonométrica como división de longitudes para obtener un tercer valor faltante (ver figura 1), de ahí la prevalencia del tratamiento aritmético y algebraico de estas nociones que señalan Montiel y Jácome (2014).

Del tema de identidades trigonométricas identificamos que se tiene la misma interacción de la matemática: simplificar operaciones, y por eso no aplica el trabajo geométrico y el estudio de diagramas. Sin embargo, en la interacción del profesor y los estudiantes se da un sentido al cambio que se hace de los elementos de la matriz de transformación lineal por identidades: compensar el desfase del tiempo entre las partes (control y mecánica) del robot; y se hace un reconocimiento de cuáles identidades trigonométricas pueden sustituirse en la matriz de transformación lineal.

También del análisis transversal del *repaso de la matemática* identificamos que, con los diagramas en bosquejo, el profesor y los estudiantes analizaron la situación del robot en casos particulares, lo que permitió que se dieran los diversos usos del ángulo: como cualidad (giro antihorario) con referencia al plano cartesiano; como cantidad (en grados) fija y variable; y como relación (respecto a los ejes *xy*). En estos usos del ángulo se estudia su carácter dinámico porque, si bien aluden a posiciones plasmadas en los diagramas, asumen que, a medida que el robot se mueve, los valores del ángulo cambian y se genera un nuevo diagrama.

El *repaso* es una estrategia de la academia de profesores para reducir el índice de reprobación, de ahí que el *contexto cultural* (que da pertenencia al grupo humano) de los cuatro temas es el mismo: el rol de la Robótica Industrial y su influencia en la funcionalidad de la matemática. En cambio, el *contexto situacional* (las condiciones donde se realiza la actividad matemática) y el *contexto de significación* (que da forma y sentido a la matemática) fueron distintos para cada tema porque estos están enmarcados en aspectos técnicos de la Robótica y en axiomas del Álgebra Lineal, y con los cuales se manifiesta la funcionalidad de cada noción trigonométrica.

6. Conclusiones

El análisis del *repaso de la matemática* de la etapa *in situ* del estudio etnográfico de la Ingeniería Mecatrónica pone de manifiesto tres componentes: el rol de los diagramas, la permanencia y funcionalidad de la noción de razón trigonométrica, y la ausencia del significado lineal. Estos componentes señalan que el *repaso* va más allá de recuperar los contenidos de las Ciencias Básicas y sintetizarlos de forma previa a abordar temas de la asignatura profesionalizante (último año) de Robótica Industrial. Si bien esta estrategia didáctica para reducir el índice de reprobación ha resultado favorecedora, porque proporciona a los estudiantes el contenido matemático que inmediatamente pondrán en uso en los problemas disciplinares, algunas de sus características matemáticas son distintas respecto a las asignaturas de Matemáticas de las Ciencias Básicas.

En el primer componente, el rol de los diagramas se identifica que la puesta en uso de lo trigonométrico se materializa en bosquejos de triángulos rectángulos, donde incorporan la medición a través de métricas (relaciones cateto-cateto) en el plano cartesiano y el movimiento circular para modelar el problema, desarrollar las matrices y justificar la solución numérica. Por lo que el diagrama tiene un rol doble: modela la situación bajo estudio (el movimiento del robot) y es un medio para justificar las operaciones matemáticas (matriciales en este caso). Esto contradice el rol único que suele favorecer la matemática escolar: obtener datos para realizar cálculos de casos donde el ángulo no varía, lo que podría incorporarse al rediseño de los procesos de transmisión didáctica de las asignaturas de Matemáticas. De esta manera, el estudiante tendría un nuevo *contexto de significación*: transitar de una realidad a un diagrama para estudiar la situación particular (estática o dinámica) y contar con un medio de validación de los tratamientos aritmético y algebraico de las nociones trigonométricas.

En el segundo componente, la permanencia y funcionalidad de la noción de razón trigonométrica, se identifica que en la puesta en uso de lo trigonométrico prevalece la relación ángulo-distancia en las matrices (relaciones cateto-cateto). De aquí que reconozcamos que la razón trigonométrica como noción matemática evoluciona y simultáneamente se vuelve más compleja por la especificidad del conocimiento disciplinar de la Ingeniería Mecatrónica: el escenario de la Robótica articula contenido de Cinemática (Física) y Álgebra Lineal. Además, aunque las nociones trigonométricas están integradas a las matrices, la noción mantiene su esencia porque lo trigonométrico sigue sus propias características matemáticas, a diferencia de las matrices que siguen los axiomas del Álgebra Lineal.

En el tercer componente, la ausencia del significado lineal (véase Montiel y Jácome, 2014) fue notoria en la puesta en uso de lo trigonométrico, cuando el profesor y los estudiantes evocaron a diferentes herramientas de la Trigonometría (triángulo, círculo y gráficas trascendentes), lo que manifiesta que reconocen como cantidad trigonométrica los valores de seno y coseno de las matrices. Por ejemplo, se forma el seno de 30° cuya cantidad trigonométrica es 0.5 en un objeto que mide 40 cm de cateto opuesto y 80 cm de hipotenusa, y en un objeto más grande que mide 1 m de cateto opuesto y 2 m de hipotenusa.

Esto podría incorporarse al rediseño de los procesos de transmisión didáctica de las asignaturas de Matemáticas, de manera que el estudiante tendría un nuevo *contexto de significación*: las herramientas de la Trigonometría le permitirían cerciorarse de que a valores iguales de ángulos se dan las mismas cantidades trigonométricas sin importar el tamaño del objeto, en contraste con su obtención mediante la calculadora científica. Si bien el significado lineal está ausente, este estudio etnográfico no nos permite identificar cuándo se dio su confrontación, aunque por la etapa documental (ver Torres-Corrales y Montiel, 2020) lo atribuimos a los diagramas y la articulación de sus características matemáticas que se da en las asignaturas de Ciencias de la Ingeniería (segundo y tercer año).

Dados los tres componentes expuestos, la forma en que el profesor aborda el *repaso de la matemática* puede aportar a articular y robustecer los contenidos trigonométricos en las asignaturas de Matemáticas de las Ciencias Básicas (y extenderse a otros niveles educativos previos con sus respectivas adaptaciones) con las características matemáticas y contextuales propias de la Ingeniería. Por lo que planteamos que, a través de un metaanálisis de estudios etnográficos de diversas asignaturas de Ciencias de la Ingeniería y Profesionalizantes, se podría asegurar que cualquier *repaso de la matemática* va más allá de recuperar los contenidos de las Ciencias Básicas y sintetizarlos previamente al abordar temas de la asignatura en cuestión, de esta manera se tendrían insumos con base en la investigación para elaborar propuestas de rediseño del discurso Matemático Escolar de la Ingeniería.

Se declara que la obra que se presenta es original, no está en proceso de evaluación en ninguna otra publicación, así también que no existe conflicto de intereses respecto a la presente publicación.

• Referencias

Camarena, P. (2013). A treinta años de la teoría educativa “Matemática en el Contexto de las Ciencias”. *Innovación Educativa 13*(62), 17-44. https://cutt.ly/2KZW4ZQ

Cantoral, R. y Farfán, R. (2003). Mathematics Education: A vision of its evolution. *Educational Studies in Mathematics 53*(3), 255-270. https://doi.org/10.1023/A:1026008829822

Cantoral, R., Montiel, G. y Reyes-Gasperini, D. (2015). Análisis del discurso Matemático Escolar en los libros de texto, una mirada desde la Teoría Socioepistemológica. *Avances de Investigación en Educación Matemática 8*, 9-28. https://doi.org/10.35763/aiem.v1i8.123

Cantoral, R., Reyes-Gasperini, D. y Montiel, G. (2014). Socioepistemología, Matemáticas y Realidad. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática 7*(3), 91-116. https://bit.ly/3s8r0yA

Cruz-Márquez, G. (2018). *De Sirio a Ptolomeo: Una problematización de las nociones trigonométricas* [tesis de maestría]. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados. http://dx.doi.org/10.13140/RG.2.2.18095.64166

D’Ambrosio, U. (1985). Ethnomathematics and its place in the history and pedagogy of mathematics. *For the Learning of Mathematics 5*(1), 44-48. https://flm-journal.org/Articles/72AAA4C74C1AA8F2ADBC208D7E391C.pdf

Domínguez, P., Oliveros, M., Coronado, M. y Valdez, B. (2019). Retos de ingeniería: enfoque educativo STEM+A en la revolución industrial 4.0. *Innovación Educativa 19*(80), 15-32. https://bit.ly/2WRwql6

Fàbregues, S. y Paré, M. (2016). Capítulo IV. La observación participante. En S. Fàbregues, J. Meneses, D. Rodríguez-Gómez y M. Paré (coords.), *Técnicas de investigación social y educativa* (pp. 193-221). Barcelona: Editorial UOC.

Faulkner, B., Earl, K. y Herman, G. (2019). Mathematical maturity for engineering students. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education* 5, 1-32. https://doi.org/10.1007/s40753-019-00083-8

Geertz, C. (2006). *La interpretación de las culturas*. Undécima Edición. España: Gedisa.

Hammersley, M. y Atkinson, P. (1994). *Etnografía. Métodos de Investigación*. Segunda Edición. Barcelona: Paidós.

Hinojos, J. y Farfán, R. (2017). Acerca de las nociones de estabilidad en electricidad, la relación entre el calor y la electricidad. *Revista De História Da Educação Matemática 3*(3). https://cutt.ly/ZKVidux

Hinojos, J., Farfán, R. y Orozco, M. (2021). An alternative to broaden the school-promoted meanings of mathematics in electrical sciences from socioepistemology. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology 52*(8), 1161-1174. https://doi.org/10.1080/0020739X.2020.1741710

Jácome, G. (2011). *Estudio Socioepistemológico a las relaciones trigonométricas en el triángulo rectángulo. Un acercamiento a los significados construidos por el profesor* [tesis de maestría]. Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del Instituto Politécnico Nacional.

Montiel, G. (2011). *Construcción de conocimiento trigonométrico. Un estudio Socioepistemológico*. México: Ediciones Díaz de Santos.

Montiel, G. y Jácome, G. (2014). Significado trigonométrico en el profesor. *Boletim de Educação Matemática 28*(50), 1193-1216. http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v28n50a10

Penalva, C., Alaminos, A., Francés, F. y Santacreu, O. (2015). *La investigación cualitativa. Técnicas de investigación y análisis con Atlas.ti*. Ecuador: PYDLOS.

Pepin, B., Biehler, R. y Gueudet, G. (2021). Mathematics in Engineering Education: a Review of the Recent Literature with a View towards Innovative Practices. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education 7*, 163-188. https://doi.org/10.1007/s40753-021-00139-8

Romo-Vásquez, A. (2014). La modelización matemática en la formación de ingenieros. *Revista Educación Matemática, especial 25* años, 314-338. https://cutt.ly/rKZEzV7

Rotaeche, R. y Montiel, G. (2017). Aprendizaje del concepto escolar de ángulo en estudiantes mexicanos de nivel secundaria. *Educación Matemática 29*(1), 171-199. https://doi.org/10.24844/EM2901.07

SEFI [European Society for Engineering Education] (2013). *A Framework for Mathematics Curricula in Engineering Education*. https://cutt.ly/AKZEirp

Scholz, O. (2014). *Construcción de significados para lo trigonométrico en el contexto geométrico del círculo* [tesis de maestría]. Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del Instituto Politécnico Nacional. http://dx.doi.org/10.13140/RG.2.2.34414.10568

Torres-Corrales, D. (2014). *Un entorno geométrico para la resignificación de las razones trigonométricas en estudiantes de Ingeniería* [tesis de maestría]. Instituto Tecnológico de Sonora. https://doi.org/10.13140/RG.2.1.2993.5603/1

Torres-Corrales, D., López-Acosta, L. y Montiel, G. (2020). Experiencias formativas de investigadores en el desarrollo de proyectos doctorales de Matemática Educativa. En Sánchez-Luján, B. e Hinojosa-Luján, R. (coords.). *Trazas de la investigación educativa en la experiencia de sus Quijotes: Reflexiones y aportes* (pp. 103-119). Red de Investigadores Educativos Chihuahua. https://www.rediech.org/omp/index.php/editorial/catalog/book/14

Torres-Corrales, D. y Montiel, G. (2019). Characterization of uses of trigonometric notions in Mechatronics Engineering from Mathematics Education. *ECORFAN Journal-Spain 6*(10), 9-21. https://doi.org/10.35429/EJS.2019.10.6.9.21

Torres-Corrales, D. y Montiel, G. (2020). La desarticulación matemática en Ingeniería. Una alternativa para su estudio y atención, desde la Matemática Educativa. *Nóesis. Revista de Ciencias Sociales y Humanidades 29*(58-1), 24-55. https://doi.org/10.20983/noesis.2020.3.2

Torres-Corrales, D. y Montiel-Espinosa, G. (2021). Resignificación de la razón trigonométrica en estudiantes de primer año de Ingeniería. *Revista Educación Matemática 33*(3), 202-232. https://doi.org/10.24844/EM3303.08

Tuyub, I. y Buendía, G. (2017). Gráficas lineales: un proceso de significación a partir de su uso en ingeniería. *Revista de Investigación Educativa de la Rediech 8*(15), 11-28. https://doi.org/10.33010/ie_rie_rediech.v8i15.44