Estrategia didáctica fundamentada en el uso de GeoGebra para mejorar la comprensión del concepto de semejanza de triángulos

Armando Morales Carballo
Angie Damián Mojica
Facultad de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Guerrero

Resumen

En este trabajo se describen los resultados de la puesta en práctica de una propuesta didáctica para la comprensión del concepto de semejanza de triángulos en el preuniversitario. La fundamentación teórica y metodológica se sustentó en los aportes de la resolución de problemas vista como objeto de enseñanza, en el uso del *software* GeoGebra como recurso heurístico y en los procesos de comprensión de conceptos matemáticos.

Como resultado de la implementación de la propuesta, se reconoció que, mediante el alcance de las etapas de comprensión, los estudiantes lograron identificar las condiciones dadas como premisas y, a través de su tratamiento mediado por el uso del *software*, alcanzaron las exigencias del planteamiento, lo que permite establecer que, en dicho proceso, se generaron las condiciones para la comprensión del concepto de semejanza de triángulos. Con este trabajo se contribuye, con una propuesta distinta a la clásica, para la actividad de enseñanza y aprendizaje de este contenido en el nivel indicado.

Palabras clave

Comprensión, problema, propuesta didáctica, semejanza, *software* GeoGebra.

Didactic strategy based on the use of GeoGebra to improve the understanding of the concept of similarity of triangles

Abstract

This paper describes the results of the implementation of a didactic proposal for the understanding of the concept of similarity of triangles in pre-university. The theoretical and methodological foundation was based on the contributions of problem solving seen as an object of teaching, on the use of GeoGebra *software* as a heuristic resource and on the processes of understanding mathematical concepts.

As a result of the implementation of the proposal, it was identified that through the scope of the understanding stages, the students were able to identify that the conditions given as premises and through their treatment mediated using the *software* allowed them to establish the requirements of the approach, which allows establishing that in this process the conditions for the understanding

Keywords

Understanding, problem, didactic proposal, similarity, GeoGebra *software.*

Recibido: 31/01/2021
Aceptado: 15/11/2021

of the concept of similarity of triangles were generated. This work contributes with a proposal different from the classical one for the teaching and learning activity of this content at the indicated level.

Introducción

El concepto de semejanza y, en particular, la semejanza de triángulos es fundamental para el estudio y adquisición de conocimientos de la Geometría en el nivel básico de secundaria, preuniversitario y universitario, en carreras profesionales de matemáticas, al menos en México. Las dificultades en el proceso de enseñanza y aprendizaje en torno a la semejanza han generado diversas problemáticas que afectan la comprensión de los estudiantes sobre este contenido, tanto en la parte conceptual, procedimental como en el de sus aplicaciones.

En este trabajo se describe la puesta en funcionamiento de una estrategia didáctica para la comprensión del concepto de semejanza de triángulos a nivel preuniversitario, esta propuesta se fundamentó en la resolución de problemas vista como objeto de enseñanza y en el uso del *software* GeoGebra. Metodológicamente, el trabajo fue desarrollado en etapas que inciden en la comprensión de dicho concepto y en ellas se destacó el uso del recurso heurístico que potencializó el *software* dinámico.

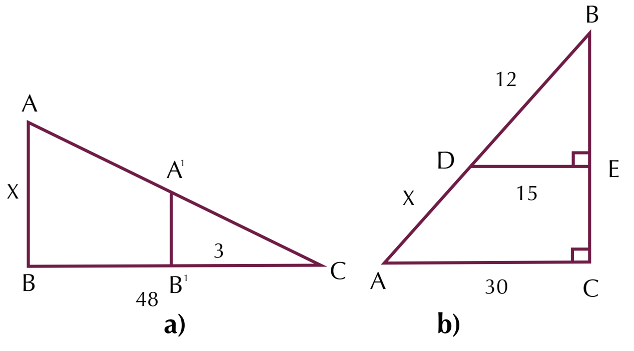
La presente investigación asume que la importancia del estudio de la semejanza, como objeto de estudio en el nivel preuniversitario, está dada por las dificultades de su enseñanza y aprendizaje reportadas en las investigaciones en el campo de la educación matemática, al igual que por el lugar que ocupa este concepto en el estudio de la geometría como eje articulador (Nolasco-Hesiquio *et al.*, 2016) de otros contenidos, por ejemplo: la proporcionalidad y el teorema de Thales, las propiedades de la semejanza y de los fundamentos que tributan en otras propiedades como aplicación del concepto de semejanza de triángulos.

Antecedentes

Investigaciones en el campo de la matemática educativa sobre el concepto de semejanza y dirigidas hacia el profesor

Nolasco-Hesiquio *et al.* (2016) reportaron el caso de un profesor en el que dan cuenta de cómo éste desarrolla su actividad de enseñanza del contenido de semejanza de triángulos con estudiantes del preuniversitario. La investigación tuvo como fundamento la articulación del método etnográfico con la perspectiva interaccionista y análisis del discurso para la interpretación de procesos de intercambio en el aula para la enseñanza media universitaria. En las producciones que los investigadores documentaron, se identifica que la actividad propuesta por el profesor a sus estudiantes versó sobre la aplicación del concepto de semejanza, particularmente indicó a los educandos que determinaran la cuarta proporcional; sin embargo, como se muestra en las *figura* 1a) la situación que propuso el docente a sus alumnos presenta errores conceptuales, es decir, con los datos dados no se puede determinar la longitud indicada con la literal x (cuarta proporcional). Sobre esta situación, ningún estudiante propuso alguna solución, en la interacción alumnos-maestro se pudo identificar que, tanto en los educandos como en el docente, hay ausencia de dominio conceptual y de tipo procedimental asociado al concepto de semejanza de triángulos y sus propiedades.

Figura 1. Trazo de un triángulo rectángulo.



Nota: Tomado de Nolasco-Hesiquio *et al.* (2016).

En el desarrollo que siguió el profesor (estudio de caso), no se logró identificar cómo cambió de formulación de la situación inicial a un nuevo planteamiento y conducción, como se muestra en la *figura* 1b). A pesar de que en la nueva formulación se da información coherente para el cumplimiento de las condiciones necesarias que posibilitan determinar la cuarta proporcional, en las producciones de los estudiantes se identificaron planteamientos incorrectos, por ejemplo, la mayoría de los alumnos coincidieron en que la proporción

$$\frac{15}{12} = \frac{30}{x}$$

es el planteamiento correcto para determinar el valor de x, lo cual es falso. Esta situación da cuenta de que, para este docente, la parte procedimental juega un papel más importante que lo conceptual, tal y como se ha identificado en las producciones que emergieron en el trabajo que proyectó ante sus alumnos.

Por otra parte, los investigadores antes citados también concluyeron que en general los profesores hacen evidente que las acciones como la demostración y la argumentación tienen poco peso en las clases en comparación con las acciones de exposición oral, el interrogatorio y la explicación a través de ejemplos. Organizan el contenido asociado al concepto de semejanza desde una cierta influencia dentro de la relación intrafigural, en donde se encuentra ausente la idea de transformar una figura en otra. A este respecto, Escudero (2005) establece que la definición actual de semejanza de triángulos presentada en los textos aparece muy elaborada como consecuencia de las numerosas generalizaciones realizadas a lo largo de los siglos.

Godino *et al.* (2018) en su investigación analizaron una actividad dirigida a la formación de profesores de matemáticas. El diseño se basó en la descripción y valoración de conocimientos puestos en juego en un episodio de clase videograbada, en la que el profesor gestiona el estudio de la semejanza de triángulos con un grupo de estudiantes de secundaria. Las herramientas de análisis que utilizaron fueron tomadas del modelo de Conocimiento y Competencias Didáctico-Matemáticas (CCDM).

Los resultados encontrados revelaron que el profesor debe plantearse como problema y actividad fundamental la aplicación del teorema de Thales, para justificar la semejanza de triángulos y poder aceptar la relación de proporcionalidad entre las longitudes de los lados homólogos del problema estudiado: "Si la longitud de la sombra de un árbol es de 12 m y la de un poste de 1.5 m es de 2.25 m, ¿cuál es la altura del árbol?" También se identificó que es necesaria la formulación de conjeturas por los propios estudiantes, no incluir la aplicación de un procedimiento ya ejercitado antes y evitar la resolución de tareas mediante aplicación mecánica de la regla de tres.

Los investigadores destacan que hace falta reconocer el papel de los procesos matemáticos, las conexiones matemáticas, proporcionalidad y función lineal, teorema de Thales y semejanza de triángulos, ya que este reconocimiento permitirá al profesor no sólo darle peso a la actividad de cálculo, sino también al trabajo de tipo conceptual en torno a la situación de estudio y al proceso de aprendizaje del alumno; la generación de las condiciones para acceder a este conocimiento lo pondrá en circunstancias para favorecer su comprensión acerca de la semejanza; situación que no se logró identificar desde la actividad del docente en esta investigación de referencia.

Otra indagación importante sobre el estudio de la semejanza es la que desarrolló Escudero (2005), en este trabajo se exploró el conocimiento que tienen sobre el tema dos profesores de secundaria. De manera particular, interesó conocer la integración que se produce entre el conocimiento de la materia (organización del contenido y aproximación al concepto) y el aprendizaje pedagógico (modos de representación y su uso, demanda cognitiva que favorecen las tareas, entre otras). Como elementos de análisis se consideraron los siguientes:

1. Aproximación al concepto de semejanza, dentro de éste; destaca la relación intrafigural y la transformación geométrica.
2. El tipo de actividad que se solicitó en las tareas se refieren al cálculo, la comparación, la construcción y la demostración, esencialmente.
3. Los modos de representación y su uso se conciben como posibilidades semióticas de representar el contenido, dentro de éste los considerados son: lenguaje natural, figurativo, numérico/simbólico, situación y material concreto.
4. Aprehensión que se favorece para describir cuál es la aportación intuitiva de la figura en un problema geométrico, se han considerado los siguientes tipos: perceptual, operativo, secuencial y discursivo.

Tomando como base estos elementos, la investigadora concluye que uno de los profesores organizó el contenido matemático a través de dos núcleos principales, el teorema de Thales y la semejanza de figuras (triángulos y polígonos semejantes), además los colocó en un mismo nivel de relevancia. Destaca que el profesor se aproxima al concepto de semejanza dentro de la relación intrafigural (considerando aspectos de proyección y homotecia con las razones correspondientes y la diferenciación entre razón interna y externa) cuando aborda la semejanza de triángulos y dicha relación se amplía a la transformación geométrica, cuando estudia la semejanza de polígonos.

La forma en la que el profesor (objeto de estudio de la investigación de referencia) prepara el contenido de la semejanza, obliga a la búsqueda de planteamientos teóricos y metodológicos, así como al estudio de la evolución histórica como actividad esencial que favorece los procesos metodológicos para la enseñanza y el aprendizaje de este contenido de la geometría.

Dündar y Gündüz (2017) realizaron una investigación en la que se plantearon como objetivo: examinar el nivel de conocimiento conceptual sobre los conceptos de semejanza y congruencia en futuros profesores de matemáticas. Luego de la realización de actividades con 46 profesores, los investigadores concluyeron que los futuros maestros tienen éxito en preguntas de conocimiento conceptual, pero tienen dificultades en los problemas donde se solicita justificar los aprendizajes. Existe una relación entre niveles de conocimiento teórico y el argumento estándar de los futuros maestros, así como dificultades para proponer y resolver problemas de la vida cotidiana aplicando la congruencia y la semejanza.

Estas dificultades encontradas en los futuros profesores refuerza la tesis de que hoy en día no es suficiente la realización de trabajos de investigación dirigidos hacia el alumno o hacia el currículum, sino que es fundamental orientar la investigación hacia el estudio del docente o futuro docente, esto con la finalidad de contar con elementos que complementen la descripción de la problemática que se relaciona con la comprensión conceptual, el caso de la semejanza de triángulos.

Investigaciones en el campo de la matemática educativa sobre la semejanza, dirigidas hacia el estudiante

Briseño y Alamillo (2017) destacan que los estudiantes de secundaria presentan dificultades para la comprensión del concepto de semejanza de figuras geométricas; por ello, plantean que la utilización del tangram -el cual consiste en “un rompecabezas (juego tradicional chino) un cuadrado dividido en siete piezas (un paralelogramo, un cuadrado y cinco triángulos) que pide ordenar estas piezas para lograr diseños específicos”-, favorece la identificación de relaciones de semejanza a partir de la manipulación y construcción de figuras geométricas. Los autores establecen que el uso excesivo de la memorización y aplicación de fórmulas carecen conceptualmente de significado para el estudiante. Para incidir en la problemática detectada, elaboran un conjunto de actividades según los medios didácticos que establece la Teoría de Situaciones Didácticas (TSD), situaciones de acción, formulación, validación e institucionalización. Luego de llevar a cabo las actividades con 16 alumnos de nivel secundaria, encontraron que los datos en cada situación son representativos e indican que: el estudiante comprende la noción de semejanza con el uso del tangram al utilizar prácticas de medición y comparación de figuras. Por ejemplo, en la situación de acción, reportaron que su uso favoreció la interacción del alumno con sus compañeros, dando lugar al proceso de comprensión de la noción de semejanza, puesto que, al medir las figuras que conformaban el tangram, tenían un primer acercamiento con los elementos de la geometría, como ángulos y medida de los lados. Concluyeron que, los estudiantes del nivel indicado desarrollan la noción de semejanza, si se les proponen actividades en las que utilicen prácticas de medición y comparación de figuras geométricas, ya que establecen que, en esos desarrollos, se podrán construir ideas sobre la razón de lados proporcionales y semejanza. Finalmente, consideran que el trabajo realizado queda limitado en cuanto al seguimiento del desarrollo con los estudiantes, cuando éstos se encuentren en grados escolares posteriores.

Sanabria (2018) identificó en estudiantes de octavo grado (segundo de secundaria en México) dificultades en la formulación y resolución de problemas que involucran relaciones y propiedades de semejanza y congruencia. Con el propósito de contribuir a la solución de esta problemática, elaboró un diseño de actividades a partir de los niveles de desarrollo de Van Hiele: reconocimiento o visualización, análisis, clasificación (abstracción), deducción formal y rigor. Tales actividades se trabajaron en las siguientes fases: información, orientación dirigida, explicitación, orientación libre e integración. Algunas de las actividades se relacionan con figuras a escalas, concepto intuitivo de semejanza, conceptos que anteceden al de razón y proporción, semejanza de triángulos y algunos problemas de aplicación. La investigación concluye que las actividades que se proyectaron, permitieron a los estudiantes de octavo grado alcanzar el primer, segundo y tercer nivel de desarrollo, según Van Hiele, esto es: reconocimiento o visualización, análisis y clasificación; sin embargo, se identificó que, si bien el trabajo mostró efectividad en relación con la parte conceptual, aún es necesario potencializar el sistema de actividades para favorecer el desarrollo de las etapas de comprensión, según Van Hiele.

Martínez *et al.* (2017) destacan que el uso de las Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC) ofrecen a los estudiantes un conjunto de estímulos visuales, auditivos y táctiles que facilitan y potencializan sus aprendizajes. En su investigación elaboraron una propuesta metodológica con base en el uso de tabletas para favorecer el aprendizaje de la semejanza de triángulos, esta propuesta fue aplicada en estudiantes de segundo año medio; para la evaluación de dicha aplicación, se consideraron indicadores de acuerdo con la taxonomía de Bloom: conocimiento, comprensión, aplicación y análisis.

Las actividades que se implementaron se refieren a la retroalimentación del concepto de semejanza, problemas correspondientes entre pares de triángulos semejantes y una prueba cognitiva. De las respuestas que produjeron 18 estudiantes, las investigadoras observaron, con base en datos estadísticos, que estos alumnos no lograron obtener ideas sobre la comprensión, tampoco lograron analizar el concepto de semejanza; sin embargo, se arrojó información que dio cuenta que los educandos sí entendieron los criterios de semejanza. Finalmente, las autoras de esta investigación concluyeron que la modalidad de implementación del uso de la tecnología ayudó a que los aprendices elevaran su motivación por las clases, a pesar de que una población importante aún se resiste a esta forma de enseñanza.

Llantén y Bermúdez (2014) plantearon una secuencia didáctica para favorecer en los estudiantes una aproximación al concepto de semejanza y sus propiedades. Para ello, utilizaron como instrumento didáctico la App GeoGebra para el estudio de la visualización, la manipulación y el desplazamiento. Este trabajo lo fundamentaron en la TSD. Los autores concluyeron que: el estudiante descubre la necesidad de encontrar la razón entre las alturas para determinar que las figuras son semejantes, posteriormente establece la igualdad entre los ángulos de los triángulos, luego determina la congruencia entre los ángulos correspondientes y, finalmente, aplica los criterios ALA y LAL para establecer la semejanza.

Hernández *et al.* (2015) realizaron una investigación con el propósito de facilitar los procesos de comprensión sobre la semejanza, dicho trabajo se sustentó en el modelo de comprensión de Pirie y Kieren. Este modelo permite analizar el proceso de desarrollo de la comprensión de conceptos en matemáticas y se subdivide en estratos: conocimiento primitivo, creación de imagen, comprensión de la imagen, formalización, observación, estructuración e invención. Fundamentados en este modelo, los investigadores plantearon una actividad de doblado de papel a tres alumnos. Con ello, se buscó favorecer el aprendizaje y la comprensión de la congruencia como un caso particular de la semejanza.

Posterior a la aplicación de la actividad, se analizó el desempeño de cada alumno por separado; la conclusión fue que los estudiantes (objeto de estudio) no lograron un nivel óptimo para poder avanzar en la comprensión de conceptos de la geometría, en particular del concepto de semejanza.

Exploración sobre nociones de semejanza de triángulos en estudiantes del preuniversitario

Con la finalidad de enriquecer el fundamento de esta investigación, se llevó a cabo una exploración acerca de las nociones de semejanza de triángulos en 35 estudiantes que asistían al curso de inducción para ingreso a la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Autónoma de Guerrero, en el ciclo escolar 2019-2020.

Dichos estudiantes (aspirantes al nivel superior) provienen de distintos centros educativos del nivel medio superior del estado de Guerrero, México: Centro de Bachillerato Tecnológico Industrial y de Servicios (CBTis), Colegio de Bachilleres (Cobach) y de Escuelas Preparatorias de la Universidad Autónoma de Guerrero (UAGro). Como resultado de la exploración, se identificaron en los estudiantes las siguientes dificultades: conocen la definición de semejanza de triángulos, pero no han comprendido el papel de las condiciones que la estructuran, así como cuál es su relación. No tienen claridad de los criterios de la semejanza y presentan dificultades sobre la aplicación en la resolución de problemas dentro y fuera de la matemática.

Problemáticas identificadas

Como resultado del análisis de las investigaciones que se han documentado se destaca que, el estudio de la semejanza de triángulos ocupa un lugar importante, ya que un número considerable de académicos han destacado que este concepto y sus propiedades juegan un papel importante en el desarrollo de la geometría plana, desde los niveles básico a preuniversitario; sin embargo, en las mismas investigaciones se da cuenta de que existen distintas problemáticas asociadas a la enseñanza y al aprendizaje del concepto de semejanza de triángulos, así como su aplicación.

Dentro de las problemáticas encontradas se destacan las siguientes: de las investigaciones orientadas al estudio del profesor, en particular de su gestión de enseñanza del contenido de semejanza, muestran que, en algunos casos, los profesores presentan dificultades en el dominio del contenido matemático sobre la semejanza. Estas dificultades, en parte se asocian a las distintas formas de aproximarse al concepto de semejanza, destacando que es común el acercamiento a través de las relaciones intrafigurales.

En los trabajos revisados se identifica, tanto explícita como implícitamente, la aceptación de que el concepto de semejanza de triángulos es un eje articulador de otros contenidos, como la proporcionalidad y el teorema de Thales, las propiedades de la semejanza y de los fundamentos que tributan en otras propiedades de aplicación del concepto de semejanza de triángulos; sin embargo, dada la existencia del problema sobre la comprensión de la definición del concepto de semejanza de triángulos identificada en los trabajos citados, se tiene la necesidad de contribuir con propuestas didácticas que incidan en la comprensión y que, a la vez, resalten la importancia de los demás componentes articulados en torno a la semejanza.

En los trabajos de investigación que han incorporado el uso de las herramientas tecnológicas para el tratamiento de la semejanza, en particular en los que han incorporado el uso del *software*, se identificó que esta utilidad es de carácter más instructivo, relegando a un segundo plano el uso del *software* como recurso heurístico que posibilite el redescubrimiento de comportamientos, verifique casos particulares, favorezca el proceso de conjeturación y principios de generalización, entre otros elementos importantes que derivan en la comprensión.

Como se ha documentado antes, existen investigaciones desarrolladas que se han planteado el objetivo de incidir en los problemas de enseñanza y aprendizaje de la semejanza de triángulos; sin embargo, en estos trabajos también se da cuenta de la importancia y la necesidad de implementar alternativas que contribuyan a la atención de estas problemáticas. Por lo tanto, el problema de investigación que atendió este trabajo se formuló en los siguientes términos: ¿Cómo favorecer, mediante el uso del *software* GeoGebra y la resolución de problemas, la comprensión del concepto de semejanza de triángulos en estudiantes de preuniversitario?

Como objetivo de investigación se planteó: Elaborar y poner en funcionamiento una propuesta didáctica basada en el uso del *software* GeoGebra y en la resolución de problemas para la comprensión de la definición de semejanza de triángulos en el preuniversitario.

Fundamentación teórica y metodológica

Resolución de problemas

Morales *et al.* (2014) destacan que la importancia de incorporar la resolución de problemas como objeto de enseñanza radica en que, bajo esta mirada, el proceso de resolución no se limita sólo a la búsqueda que exige la situación, sino que se generan las condiciones para comprender el contenido que está alrededor de los conceptos, propiedades y condiciones que estructuran la situación de estudio, ya que este proceso es el que justifica la validez de las estrategias de resolución, las cuales contribuyen en la vía desconocida que se plantea al inicio cada uno de los problemas. Por tanto, desde este punto de vista, el tratamiento de los conceptos y propiedades matemáticas, en particular el concepto de semejanza de triángulos, puede ser abordado desde la resolución de problemas.

Esta importancia que se le da a la resolución de problemas exige clarificar cuáles deben ser sus rasgos fundamentales. En la investigación se asume que el concepto problema tiene las siguientes características:

> Existe una situación inicial o varias situaciones iniciales, y una o varias situaciones finales; la vía de pasar de la situación o situaciones iniciales a la situación o situaciones finales debe ser desconocida o que no se pueda acceder a ellas de forma inmediata; debe existir una persona que quiera resolverla; y esta persona debe disponer de los elementos necesarios para buscar las relaciones que le permitan transformar la situación o situaciones planteadas (Campistrous y Rizo, 1996, p. 9).

Proceso de comprensión de conceptos

Los conceptos son parte de la estructura matemática y juegan un papel fundamental en el desarrollo del conocimiento de esta disciplina, así como en la explicación de la realidad objetiva (Ballester, 1992). Gran parte de las dificultades para la comprensión de los contenidos matemáticos que se documentan en las investigaciones radica en la ausencia del tratamiento de los conceptos. En este trabajo se asume que la comprensión de los conceptos exige dos actividades fundamentales: la formación y la asimilación (fijación) (Morales *et al.*, 2021). Bajo esta mirada, la presente investigación busca aportar recursos para incidir en la comprensión de conceptos, en particular, sobre la comprensión del concepto de semejanza de triángulos.

Los trabajos de investigación de Morales *et al.* (2014) y Arteaga *et al.* (2009) coinciden en asumir que el proceso de comprensión requiere de ejercitaciones, profundizaciones, sistematizaciones y aplicaciones del concepto. Por tanto, para hacer posible dicho proceso de comprensión, deben desarrollarse metodológicamente las siguientes etapas: Aproximación al concepto. En esta etapa se reconocen los rasgos esenciales y las condiciones que entran en juego en la definición del concepto. Formalización del concepto. La formalización del concepto abarca la etapa anterior y esencialmente está encaminada a favorecer la asimilación de la definición del concepto; por ello, se consideran: la aproximación, la formalización, la valoración y el control como etapas fundamentales de ese proceso. Identificación del concepto. En esta fase se proponen algunos problemas que favorecen la localización de la necesidad de utilizar el término. Aplicación del concepto. En esta etapa se analizan problemas que favorecen la asimilación a través de la aplicación y, por tanto, contribuyen a la comprensión conceptual.

En cada una de las etapas del proceso de comprensión, los procedimientos heurísticos son una herramienta fundamental, ya que constituyen recursos mentales de búsqueda que permiten orientar y aportar elementos para la comprensión y determinación del concepto sobre la base de resolución de problemas (Torres, 2013).

Software GeoGebra

Morales *et al.* (2021) establecen que este *software* forma parte de las herramientas tecnológicas, además es un instrumento que favorece la actividad dinámico-visual a través de las herramientas que ofrecen el tratamiento de contenidos de la matemática en los distintos niveles educativos.

Los investigadores que se citan sostienen que el uso de GeoGebra como una herramienta heurística permite hacer evolucionar los procesos que tienen generalización; esto es a través del redescubrimiento de patrones de comportamiento. Argumentan que el *software*, por sí solo, no arroja las soluciones a distintas situaciones; a medida en que se manipula, se ensaya o se llevan a cabo acciones preelaboradas o teóricamente válidas es como se redescubre, se formulan conjeturas, se plantean estrategias de resolución y se llevan a cabo estos procesos. En tal dirección, la representación dinámica-visual y el tratamiento de esta disciplina a través del *software*, se convierte en un recurso heurístico para la enseñanza y el aprendizaje, en particular, de la geometría. Con lo antes dicho, en este trabajo asumiremos el *software* GeoGebra como: "un recurso heurístico mediador de los procesos de enseñanza y aprendizaje, en donde la actividad dinámico-visual que favorece la asociación de imágenes-ideas contribuye en la interiorización de los procesos de abstracción sobre los contenidos matemáticos a tratarse, los cuales influyen en la comprensión matemática".

Método

Estrategia didáctica y su validación

La estrategia didáctica para la comprensión del concepto de semejanza consta de las siguientes etapas: Aproximación al concepto: esta fase permite comprender las situaciones de estudio que involucran el concepto principal; ayuda a identificar los tipos de problemas a enfrentar, su relación con el concepto de semejanza y los recursos para su tratamiento. Orientación hacia la formalización: una vez que se ha logrado una aproximación a la comprensión de la situación y de su tipo, se clasifica y se describe una vía de solución. Se determina si son suficientes los datos o si hay necesidad de hacer un trabajo intermedio para tal alcance. Control y valoración: esta etapa aparece porque la resolución de un problema matemático necesita elevarse al plano teórico, para potenciar la generalización a partir de los resultados que se van obteniendo, de ahí la importancia del control y valoración. Desde el punto de vista metodológico, esta fase resulta fundamental, ya que ayuda a identificar los niveles de alcance y comprensión de los alumnos acerca del contenido que involucran las situaciones de estudio asociadas con la definición de la semejanza de triángulos.

Dado que la estrategia se sustenta en el uso de GeoGebra y en la resolución de problemas, se diseñaron cuatro actividades (problemas). Las dos primeras tienen el objetivo de favorecer la comprensión de las condiciones de la definición de triángulos semejantes, mientras que las otras actividades se proyectan para fijar las condiciones de la definición a través de la aplicación.

La estrategia se validó con cinco profesores-investigadores: tres doctores y dos maestros en Ciencias, todos con dominios sólidos en Geometría y con especialidad en Educación Matemática. Inicialmente el diseño constaba siete actividades, pero por recomendación de los expertos se redujo el número, mas no el contenido, además se afinaron las condiciones dadas en cada situación y se rescataron dos problemas de aplicación del concepto de semejanza de triángulos, los cuales permitieron fijar la definición y mostrar el papel que juega ésta en la resolución de problemas.

Sistema de actividades y la población de estudio

Las actividades se aplicaron a una población de 26 alumnos recién ingresados a la carrera de Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Autónoma de Guerrero. Al momento de la aplicación los alumnos sólo llevaban cuatro semanas de clases en el nivel superior; por lo que se considera como conocimientos base sus saberes adquiridos en el preuniversitario. De manera particular, en este trabajo se reportan las producciones de dos casos, los cuales se determinaron a través del análisis previo de las producciones que emergieron durante la puesta en práctica de las actividades, de acuerdo con los objetivos de la investigación.

Dinámica de la aplicación de la estrategia

Los alumnos trabajaron de manera individual. Cada actividad se desarrolló en un tiempo de 50 minutos, aproximadamente, con previa preparación de las condiciones de nivel de partida. Así, en la actividad cero (problema cero) se planteó el trabajo sin el uso del *software*; posteriormente, se aseguraron las condiciones de uso del instrumento tecnológico y se orientó la actividad hacia el uso de esta herramienta durante el proceso que condujo a los estudiantes a la comprensión de la definición de semejanza de triángulos.

Análisis y resultados

Problema 0

Se sabe que dos triángulos son semejantes si tienen iguales respectivamente sus ángulos y sus lados correspondientes proporcionales. Así que para decidir si dos triángulos pueden ser semejantes, se debe investigar cómo son sus ángulos y sus lados, para comprobar si cumplen con la definición.

Actividad 0. Investigar si hay una vía sencilla para saber si dos triángulos dados son semejantes.

El responsable de investigación (RI) hizo llegar al grupo de estudiantes la siguiente instrucción: Utilizar regla (graduada) y compás para llevar a cabo las siguientes actividades:

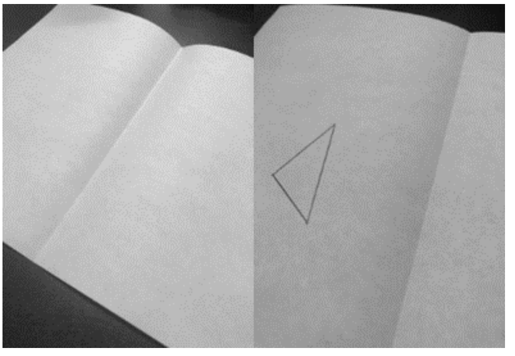
1. Sobre la primera mitad de una hoja de papel, dibuja un triángulo de la forma y tamaño que desees.
2. En la mitad restante, dibuja otro triángulo con un ángulo igual a cualquiera de los ángulos del anterior triángulo, de modo que los lados que lo forman en uno y otro triángulo sean proporcionales.
3. Por superposición de los triángulos así construidos, investigue cómo son sus tres ángulos.
4. Auxiliándote de la operación de medir y calcular, investiga si los triángulos así construidos tienen lados proporcionales.

Los estudiantes trabajaron esta actividad de manera individual. Aquí se muestra la producción y explicación de la respuesta a esta actividad de uno de los casos que conformaron el grupo de estudio, a quien se etiquetó como A4.

RI: A ver A4, te pido y nos apoyes explicando las actividades que llevaste a cabo según las instrucciones dadas.

A4: […] Bueno en la actividad 1; no tuve dificultades llevé a cabo la indicación de dividir en dos partes iguales la hoja, y dibujé un triángulo, ver *figura* 2.

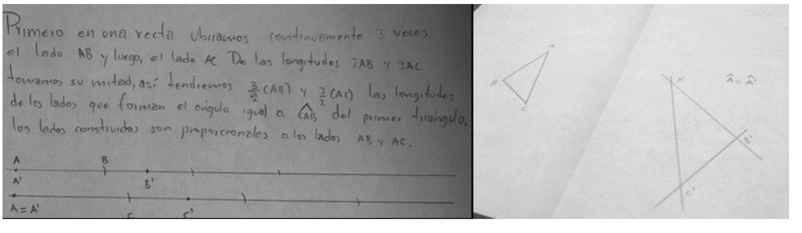
Figura 2. Producción de A4.



Nota: Tomada de la producción de A4.

La explicación de la actividad 2 que dio A4 se apoyó en la producción que llevó a cabo, ver *figura* 3.

Figura 3. Producción de A4.

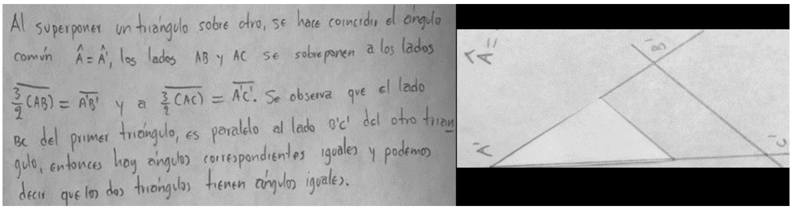


Nota: Tomada de la producción de A4.

A4: […] Para la actividad 3, procedí de dos maneras, se me dificultó el sobreponer, primero lo hice acomodando los lados proporcionales que forman el ángulo, y la otra manera en como procedí, fue recortar el triángulo base y luego sobreponerlo al segundo triángulo, observo que el tercer lado del triángulo que sobrepuse es paralelo al tercer lado del segundo triángulo, con esto veo que los ángulos son iguales.

La *figura* 4 muestra que la explicación se apoyó en la producción que realizó la alumna A4.

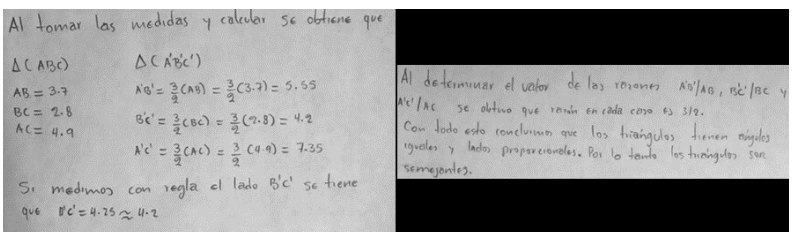
Figura 4. Método de superposición A4.



Nota: Método de superposición que utilizó A4 para explicar la relación de los ángulos de los triángulos de estudio.

A4: […] En la última actividad utilicé una regla para medir las longitudes de los dos triángulos, luego determiné las razones, aunque ya sabía que era 1.5 aproximadamente.

Figura 5. Determinación de las medidas de los lados de los triángulos de A4.

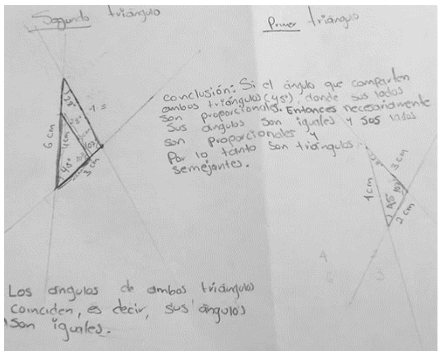


Nota: Determinación de las medidas de los lados de los triángulos y la razón entre ellos que A4 llevó a cabo.

Con el planteamiento de este problema, se pretendió acercar a los alumnos a la formulación de conjeturas y a la motivación de la prueba de las condiciones que estructuran la definición de semejanza de triángulos. En la producción y explicación que da A4 se identificó que logró comprender el problema e identificó que, bajo las condiciones dadas, se puede conjeturar [mediante la superposición] que los tres ángulos del triángulo original [Δ(ABC)] son iguales a los ángulos del triángulo [Δ(A'B'C')]. Nótese que este dato empírico lo determinó a partir de conjeturar la condición de paralelismo del tercer lado de ambos triángulos (BC y B'C'). Finalmente, la proporcionalidad de los lados, lo determina al calcular las razones y lo constata empíricamente, cuando utiliza la regla para medir el tercer lado [4.25≈4.2].

A pesar de que no justifica muchos de sus argumentos, esta elaboración le permite identificar que la igualdad de ángulos y la proporcionalidad de los lados son condiciones para poder asegurar que hay semejanza entre los triángulos; sin embargo, en la producción de otro caso A9, se identificó la siguiente construcción:

Figura 6. Actividad realizada por A9.



Nota: Tomada de la producción de A9.

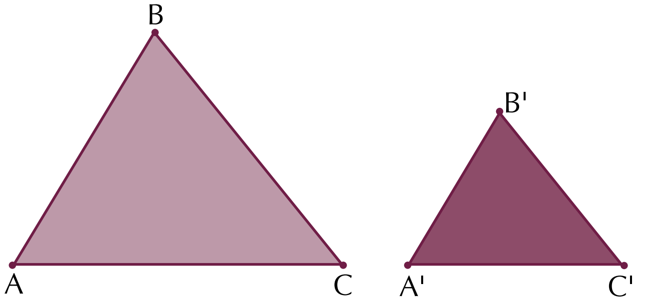
Puede observarse que A9 presentó dificultades para usar la regla y el compás. Además, se identificó que a pesar de argumentar que los ángulos son iguales, no hay proporcionalidad entre lados homólogos; sin embargo, concluye que los triángulos son semejantes. Estas identificaciones resultaron fundamentales, ya que el siguiente paso en el tratamiento de las actividades de la propuesta se plantea la búsqueda de la formulación y la prueba de las condiciones que aparecen, comúnmente, en la definición de semejanza de triángulos (se hace la observación de que no se trata de probar una definición matemática: "pues una definición no se demuestra"), sino más bien del significado de las condiciones que la estructuran.

Problema 1

Previo al planteamiento del problema, se favorecieron algunas actividades de manejo y uso del *software* GeoGebra, particularmente se familiarizó a los alumnos con actividades de construcción de triángulos y las transformaciones isométricas de traslación y rotación de objetos geométricos. Esta actividad estuvo a cargo del (RI).

Al indagar en distintas fuentes bibliográficas la definición de semejanza de dos triángulos, se identificó que comúnmente se enuncia con dos características: ángulos homólogos iguales y lados homólogos proporcionales. Con el propósito de contribuir en la comprensión de la semejanza de triángulos, se partió de la siguiente definición, donde se acentúa que la condición fuerte para garantizar la semejanza se sustenta desde la igualdad de ángulos homólogos. Definición. Dos triángulos ΔABC y $\Delta A'B'C'$ son semejantes si tienen sus tres ángulos iguales, es decir $\measuredangle A=\measuredangle A'$,$\measuredangle B=\measuredangle B'$ y $\measuredangle C=\measuredangle C'$.

Figura 7. Representación de dos triángulos semejantes.



Fuente: Elaboración propia.

Actividad 1. Utilice esta definición para establecer qué relación existe entre los lados homólogos de dos triángulos semejantes.

A continuación se describe la producción identificada en A4.

A4: […] Al analizar la definición que se ocupa aquí, aceptamos que si los triángulos son semejantes, sus ángulos son iguales. Una manera de investigar sobre los lados a través del uso del *software*, es calcular las medidas de las longitudes de los lados de cada triángulo, con esos datos se forman las razones de lados homólogos, luego se comprueba numéricamente que las razones son iguales, finalmente se formula la exigencia del problema.

En este orden se describe la explicación de la prueba que dio A4 para la búsqueda de la generalización de la explicación que ha dado. Se identificó en tal explicación que una manera de probar la igualdad de las razones de los lados homólogos es mediante la vía que se describe a continuación:

A4: […] Puedo mover mediante el uso del software el triángulo A'B'C' y hacer coincidir los ángulos $\measuredangle C$ con $\measuredangle C'$, […] se puede ver que los lados C'B' y C'A' están superpuestos a los lados CB y CA. De esta manera se podrá explicar que

$$\frac{AC}{A'C}=\frac{BC}{B'C}$$

considerando que $\measuredangle C \equiv \measuredangle C'$. *De igual manera puedo mover el triángulo pequeño y hacer coincidir los ángulos* $\measuredangle$ B *y* $\measuredangle B'$, *habrá superposición de lados y podré explicar que*

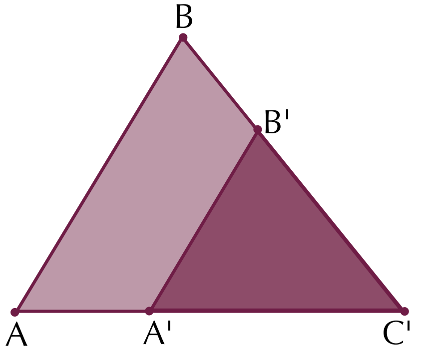
$$\frac{CB}{C'B} = \frac{AB}{A'B}$$

considerando que $\measuredangle B \equiv \measuredangle B'$. *Ya sólo falta mover en otro sentido el triángulo pequeño y poder explicar que se cumple que*

$$\frac{CA}{C'A} = \frac{BA}{B'A}$$

considerando que $\measuredangle A \equiv \measuredangle A'$. *De los pares de igualdades que se establecen, se concluye la proporcionalidad de los lados.* Cabe mencionar que la producción que se muestra a continuación fue reproducida y arreglada por los autores a fin de buscar claridad en la realización de prueba de A4, cuando hace coincidir los ángulos $\measuredangle$C y $\measuredangle$C': Al hacer coincidir los ángulos $\measuredangle$C y $\measuredangle$C' ver *figura* 8, y mediante la utilización del teorema de Thales se establecen las siguientes relaciones:

Figura 8. Utilización del Teorema de Thales.



Fuente: Elaboración propia.

$$\frac{AA'}{A'C} = \frac{A'C}{B'C}$$

considere que en este caso $\measuredangle C = \measuredangle C'$. A la igualdad anterior le sumamos en ambos lados 1,

$$\frac{AA'}{A'C} + 1 = \frac{BB'}{B'C} + 1$$

Obsérvese que

$$1 = \frac{A'C}{A'C} = \frac{B'C}{B'C}$$

sustituyendo se tiene:

$$\frac{AA'}{A'C} + \frac{A'C}{A'C} = \frac{BB'}{B'C} + \frac{B'C}{B'C}$$

Observe que

$$AA' + A'C = AC, \quad BB' + B'C = BC$$

Por tanto,

$$\frac{AA' + A'C}{A'C} = \frac{BB' + B'C}{B'C}$$

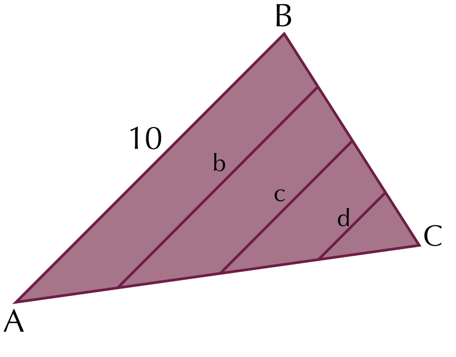
de aquí se deduce:

$$\frac{AC}{A'C} = \frac{BC}{B'C}$$

Problema 2

Sea el ΔABC, si la longitud de los segmentos a,b,c y d son paralelos y, a=10, y si, además b,c y d dividen en partes iguales a los lados AC y BC del triángulo dado. Determinar la suma a+b+c+d.

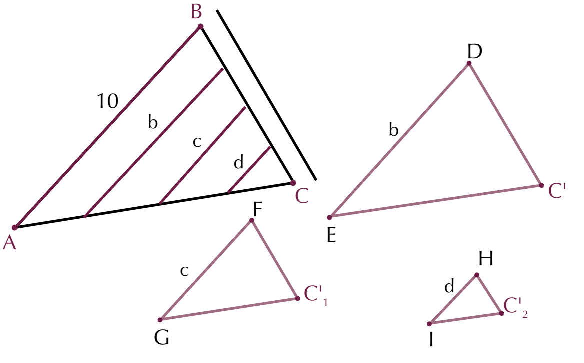
Figura 9. Representación del Problema 2.



Fuente: Elaboración propia.

- **Etapa 1:** A4 identifica que una manera para conocer la suma de las longitudes pedida es mediante el uso del *software* GeoGebra, determinando las longitudes de cada segmento y luego la suma. De este modo se obtuvieron las siguientes medidas: 10 (dato inicial), 7.5, 5, y 2.5; por tanto, la suma es 25 unidades. Dado que no hay especificidad del tipo del triángulo, la alumna [A4] hizo variar la forma del triángulo a partir de mover el vértice C y se observó que las medidas 10 (dato inicial), 7.5, 5, y 2.5 se mantienen constantes. Por lo tanto, conjeturó que la suma pedida es de 25 unidades.
- **Etapa 2:** Los estudiantes A4 y A9 explicaron que para determinar las longitudes de los segmentos b, c y d, en el caso general, siempre se logra cuando se aplica reiteradamente la segunda condición que establece la definición clásica para establecer la semejanza de dos triángulos: "Los lados homólogos de dos triángulos semejantes son proporcionales". Una vez determinadas las longitudes, se estableció la suma pedida.
- **Etapa 3:** En la *figura* 10 se han identificado los triángulos semejantes al principal; esto con la finalidad de clarificar el proceso de solución, se han realizado algunos arreglos, al lado BC se ha indicado con una x (longitud del lado), y mediante la traslación se han reubicado los triángulos semejantes.

Figura 10. Representación.



Fuente: Elaboración propia.

Con la información identificada en la Etapa 1 y con las indicaciones dadas en la Etapa 2, la alumna "[A4], procedió a formalizar la resolución". Al considerar los triángulos ΔABC y ΔEDC' semejantes, establece la proporcionalidad de los lados, es decir,

$$\frac{b}{10}=\frac{\left(\frac{3}{4}\right)x}{x}$$

obsérvese que (3/4)x es a razón de que el lado *BC* quedó dividido por los segmentos en partes iguales. Así, al resolver la proporción se obtiene que x=7.5. De modo análogo, al considerar los triángulos semejantes $\Delta EDC'$ y $\Delta GFC'_1$ se establece la siguiente proporción

$$\frac{c}{7.5}=\frac{\left(\frac{2}{4}\right)x}{\left(\frac{3}{4}\right)x}$$

de esta igualdad se obtiene que c=5. Finalmente, al considerar los triángulos $\Delta GFC'_1$ y $\Delta IHC'_2$ establece la proporción

$$\frac{d}{5}=\frac{\left(\frac{1}{4}\right)x}{\left(\frac{2}{4}\right)x}$$

resolviendo se obtiene que d=2.5. Al sumar las longitudes se obtiene que a+b+c+d=25.

Después de que los alumnos llevaron a cabo las actividades mediante el uso del *software*, se identificó en dichas producciones el uso correcto de las condiciones de la definición de semejanza de triángulos. Las respuestas de la alumna [A4] llamaron mucho la atención desde un principio, ya que en ellas se evidenciaron cualidades para el análisis, interpretación y uso de las condiciones iniciales para analizar y resolver cada uno de los problemas. En los problemas que se plantearon para la ejemplificación de la propuesta didáctica, implícitamente se previó el uso de otros conceptos y propiedades en torno a la semejanza de triángulos, que algunos investigadores llaman conexiones matemáticas (García-García y Dolores-Flores, 2020) o eje articulador (Nolasco-Hesiquio *et al.*, 2016), estos elementos matemáticos juegan un papel fundamental en la comprensión de la definición, en este caso de semejanza de triángulos.

Conclusiones

La propuesta didáctica y su puesta en escena presentan de una manera distinta la actividad de enseñanza y aprendizaje del contenido de la semejanza. En el trabajo no se privilegia la presentación clásica, por el contrario, se intenta, mediante la formulación de problemas, buscar y redescubrir el significado de las condiciones de la definición del concepto de semejanza de triángulos, así como sus propiedades y, finalmente, su aplicación. Las actividades que se diseñaron y aplicaron posibilitaron que veinte estudiantes produjeran respuestas y justificaciones correctas, en las que se identificó el alcance de las etapas de comprensión. Los resultados que reflejaron los estudiantes, como el caso de la producción de A4, da cuenta de que las actividades que se proyectaron responden al objetivo planteado.

A través del *software* se provocó el interés por generalizar el comportamiento numérico de casos particulares sobre la razón de lados y las relaciones angulares en el estudio de la semejanza de triángulos. Esta actividad fue importante, ya que sirvió de puente entre las ideas puestas en juego en el acercamiento numérico y geométrico que se realizó manualmente y el asistido por el recurso tecnológico. Como se ha descrito en las producciones representativas, en cada etapa de la propuesta el papel del *software* favoreció la actividad heurística, en el sentido que de permitió el redescubrimiento del comportamiento, además indujo a la generalización y permitió el proceso de analogías para transformar a casos simples en la aplicación del concepto.

Finalmente, con este trabajo se espera contribuir con una propuesta didáctica alternativa para la enseñanza y el aprendizaje de la geometría en el preuniversitario, que incida en las problemáticas que actualmente se han identificado.

Se declara que la obra que se presenta es original, no está en proceso de evaluación en ninguna otra publicación, así también que no existe conflicto de intereses respecto a la presente publicación.

Referencias bibliográficas

Arteaga, E., Díaz, A., García, F. y Del Sol, J. L. (2009). Alternativas metodológicas para la formación y fijación de conceptos geométricos en la geometría plana. *Cuaderns Digitals,* 0(60), 1-25.

Ballester, S. (1992). *Metodología de la enseñanza de la Matemática*. La Habana: Editorial Pueblo y Educación.

Briseño, E. C. y Alamillo, L. (2017). Propuesta de una situación didáctica con el uso de material didáctico para la comprensión de la noción de semejanza en estudiantes de segundo de secundaria. *IE Revista de Investigación Educativa de la REDIECH,* 8(15), 111-131. https://doi.org/10.33010/ie_rie_rediech.v8i15.6

Campistrous, L. y Rizo, C. (1996). *Aprende a resolver problemas aritméticos*. La Habana: Editorial Pueblo y Educación.

Dündar, S. y Gündüz, N. (2017). Justification for the subject of congruence and similarity in the context of daily life and conceptual knowledge. *Journal on Mathematics Education,* 8(1), 35–54. doi: https://doi.org/10.22342/jme.8.1.3256.35-54

Escudero, I. (2005). Un análisis del tratamiento de la semejanza en los documentos oficiales y textos escolares de matemáticas en la segunda mitad del siglo XX. *Enseñanza de las Ciencias, 23(3), 379-392.*

García-García, J. y Dolores-Flores, C. (2020). Exploring pre-university students' mathematical connections when solving Calculus application problems. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology. doi:* https://doi.org/10.1080/0020739X.2020.1729429

Godino, J. D., Giacomone, B., Font, V. y Pino-Fan, L. (2018). Conocimientos profesionales en el diseño y gestión de una clase sobre semejanza de triángulos. Análisis con herramientas del modelo CCDM. AIEM *Avances de Investigación en Educación Matemática,* 13, 63-83. doi: https://doi.org/10.35763/aiem.v0i13.224

Hernández, J. C., García M., T. y Pérez Y., T. (2015). *Comprensión del concepto de congruencia como caso particular de la semejanza mediante el doblado de papel.* (Tesis de pregrado). Universidad de Antioquia, Medellín, Colombia.

Llantén J. C. y Bermúdez M., A., (2014). *Una aproximación al aprendizaje de la semejanza de triángulos en GeoGebra* (Tesis de pregrado). Universidad del Valle. Colombia.

Martínez, C. y Sanhuenza, X. (2017). *Propuesta metodológica-didáctica para el aprendizaje de semejanza de triángulos con el uso de Tablet* (Tesis de pregrado). Universidad de Concepción, Chile.

Morales, A., Marmolejo, J. E. y Locia, E. (2014). El *software* GeoGebra: Un recurso heurístico en la resolución de problemas geométricos. *Premisa,* 16(63), 20-28.

Morales, A., Damián, A., Balbuena, S. y Marmolejo, J. E. (2021). Trayectoria hipotética de aprendizaje de las transformaciones isométricas durante el cálculo del área de polígonos a través del uso de GeoGebra. *Números,* 108, 179-193.

Nolasco-Hesiquio, H., Cabañas-Sánchez, G., Rojas, O. y Sigarreta, J.M. (2016). Matemáticas: Patrones de Interacción Discursivos en un Curso de Enseñanza Media. *Información Tecnológica,* 27(6), 215-226. http://dx.doi.org/10.4067/S0718-07642016000600022

Sanabria, A. (2018). *Propuesta didáctica para la enseñanza de los conceptos de semejanza y congruencia, dirigida a estudiantes de grado octavo* (Tesis de maestría). Universidad Nacional de Colombia, Colombia.

Torres, P. (2013). La instrucción heurística en la formación de profesores de Matemáticas. En C. Dolores, M.S. García, J. A. Hernández, L. Sosa (Eds.), *Matemática Educativa: La formación de profesores* (pp. 205-221). Díaz de Santos.