Los argumentos de estudiantes universitarios en la solución de problemas sobre ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO)

Jonathan Cervantes-Barraza[1]
Joan Sebastián Ordoñez-Cuastumal[2]
Armando Morales-Carballo[1]
[1] Universidad Autónoma de Guerrero
[2] Universidad Autónoma de Occidente en Cali, Colombia

Resumen

Presentamos un estudio sobre los argumentos que los estudiantes construyen en el contexto de las ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO) en el nivel universitario. Esta investigación nació de la necesidad de dotar de significado los problemas sobre las EDO, en razón de que numerosas investigaciones indican la desconexión entre los procedimientos algebraico-numéricos y las representaciones gráficas que realizan los estudiantes. La investigación tiene como objetivo evidenciar los tipos de argumentos que potencian la conexión del enfoque algebraico-numérico con el gráfico. Para ello, diseñamos y desarrollamos un experimento de enseñanza con estudiantes universitarios en el curso de ecuaciones diferenciales y reconstruimos los argumentos junto con los razonamientos emergentes en la solución de problemas sobre las EDO con la ayuda de la propuesta metodológica de Conner. Como parte de los resultados, identificamos que los argumentos de tipo abductivo y deductivo permiten a los estudiantes relacionar los procedimientos analíticos con lo gráfico, es decir, dotan de significado a las expresiones algebraicas en términos de representaciones gráficas.

Palabras clave

Argumentación, ecuaciones diferenciales ordinarias, experimento de enseñanza, razonamientos.

University students' arguments in solving ordinary differential equations

Abstract

We present a study about the construction of students' arguments in the context of ordinary differential equations (ODE) at university level. This research stems from the need of giving meaning to ODE problems, because numerous researches indicate there is disconnection in algebraic-numeric procedures with graphical representations made by students. The research objective is to show the kind of arguments that boost the connection of algebraic-numeric with graphical. To do so, we designed and developed a teaching experiment with university students in the course of differential equations, and we reconstructed the arguments at the same time with emerged reasonings in the solution of ODE problems based on Conner's methodological proposal. As part of our findings, we identified that the

Keywords

Argumentation, ordinary differential equations, teaching experiment, reasoning.

Recibido: 05/03/2019
Aceptado: 08/11/2019

abductive and deductive arguments allow students to relate analytic procedures with graphic, that is, to give meaning to algebraic expressions in terms of graphical representations.

Introducción

En el marco de la educación matemática se ha registrado un incremento de investigaciones en todos los niveles escolares que abordan el estudio del razonamiento matemático y los tipos de argumentos. Con respecto a las investigaciones sobre argumentación, Krummheuer (2013) reconoce que los estudiantes en los primeros años de la educación primaria establecen argumentos de tipo narrativo y diagramático. Zacharos, Pournantzi, Moutsios-Rentzos y Shiakalli (2016) reportan que los argumentos de los estudiantes de primaria contienen la estructura de los argumentos inductivos. Van Ness y Maher (2018) y Cervantes-Barraza y Cabañas-Sánchez (2018) documentan que los contraargumentos (refutaciones) en clase de matemáticas emergen como producto de presentar argumentos que carecen de garantías o de soporte. Por su parte, Lin (2018) reconoce que la calidad de los argumentos de los estudiantes depende de la validez y la completitud de sus componentes, así como de las formas de refutar garantías, conclusiones y refutaciones falsas (elementos de un argumento). En ambientes de exploración/interacción con *software* dinámico, Lavy (2006) identificó cuatro tipos de argumentos emergentes: básicos, compuestos, elaborados y generales, presentados como específicos que pueden servir como conocimiento base para establecer pruebas matemáticas. Por su parte, Schnell (2014) muestra que los estudiantes de secundaria presentan argumentos basados en conexiones entre la teoría matemática (propiedades, reglas matemáticas) y los datos generados por *softwares*. Son pocas las investigaciones que reportan los tipos de argumentos que se dan en el contexto de la matemática universitaria; sin embargo, en el contexto de problemas sobre geometría del espacio, Molina, Font y Pino-Fan (2019) describen los procesos de argumentación desde la construcción de argumentos abductivos o analógicos que evidencian la dinamización de objetos matemáticos sobre proposiciones, conceptos y procedimientos.

En cuanto a los estudios sobre ecuaciones diferenciales en el nivel universitario, se ha reportado desde un enfoque sociocultural (Stephan y Rasmussen, 2002). Estos autores abordan el estudio desde la resolución colectiva y el análisis de las prácticas matemáticas para evidenciar cómo desde la práctica social emergen situaciones de instrucción por parte del profesor que conducen a los estudiantes en la solución de ecuaciones diferenciales ordinarias. Se reconoce que las técnicas analíticas para encontrar soluciones de ecuaciones diferenciales han sido durante mucho tiempo el pilar del curso introductorio tradicional, y que la gran mayoría de las ecuaciones diferenciales no se pueden resolver con tales métodos. Sin embargo, los métodos numéricos involucran gráficas para determinar la solución de las ecuaciones diferenciales. Esto en razón de que los métodos numéricos son fáciles de emplear con la ayuda de tecnología, permiten analizar la expresión de las ecuaciones diferenciales, generan información sobre soluciones mediante la visualización y proporcionan soluciones fiables (Rasmussen, 2001). Por su parte, Rodríguez (2016) en su investigación involucró la modelación matemática y algunas aplicaciones de ecuaciones diferenciales en circuitos *rc*. Además, señala que el papel de la tecnología cumple la función de apoyar el proceso de modelación matemática en contextos mecánicos, eléctricos, hidráulicos y de naturaleza social cuando se abordan ecuaciones diferenciales. En un ambiente de geometría dinámica, Suarez, Jaimes y Chávez (2016) proponen problemas de mezclas y modelos de ecuaciones de primer orden, y reconocen que a los estudiantes se les dificulta transitar o cambiar de registros de representación: algebraico, gráfico, al lenguaje natural.

Es factible encontrar investigaciones que relacionan la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en la educación superior. Entre ellas, se encuentran las relacionadas con las ecuaciones diferenciales (Rodríguez y Quiroz, 2016; Contreras y Escobar, 2012; Dullius, Araujo y Veit, 2011; Nápoles Valdés, González Thomas, Brundo, Genes y Basabilbaso, 2004). En estos estudios se hace énfasis en que los estudiantes involucren los tres enfoques para aprender las ecuaciones diferenciales ordinarias: lo algebraico, numérico y gráfico. En este contexto, se reporta un enfoque predominante en la solución de las ecuaciones diferenciales ordinarias, el algebraico-numérico (lo analítico). Sin embargo, los estándares dictados por organizaciones nacionales e internacionales señalan que el aprendizaje de procedimientos analíticos no es suficiente para alcanzar la formación integral de los futuros profesionistas (Rodríguez y Quiroz, 2016, p. 101). En línea con lo anterior, Nápoles Valdés, González Thomas, Brundo, Genes, y Basabilbaso (2004) advierten sobre el predominio avasallador de los procedimientos algorítmico-algebraicos en el discurso matemático de nivel superior y lo señalan como un problema de técnicas y recetas de aprendizaje donde el enfoque de la enseñanza conduce al estudiante a implementar algoritmos algebraicos sin contexto y carentes de significado sobre los procesos de aproximaciones lineales (enfoque gráfico).

Como producto de la revisión de la literatura, se reconocen varios aspectos fundamentales respecto al proceso de enseñanza-aprendizaje de las EDO: 1) las investigaciones en educación matemática deben preocuparse por estudiar el pensamiento de los estudiantes mientras desarrollan ecuaciones diferenciales, ya que esto permite recolectar información base para mejorar el proceso de enseñanza (Rasmussen, 2001); 2) se reconoce la desconexión entre los enfoques analítico-gráficos al resolver problemas sobre ecuaciones diferenciales ordinarias, 3) los argumentos que construyen los estudiantes son el medio propicio para identificar razonamientos matemáticos y proporcionan un primer acercamiento a la conexión entre los enfoques analítico y gráfico.

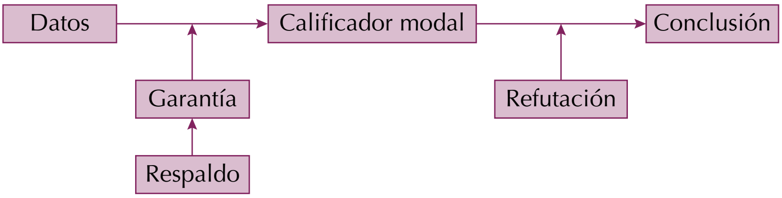
En función de la problemática planteada, este artículo tiene como objetivo principal identificar los tipos de argumentos que potencian la conexión entre los enfoques analítico y gráfico en el contexto de los problemas sobre ecuaciones diferenciales ordinarias, en particular, de problemas sobre familias de curvas ortogonales. En línea con este objetivo, el estudio aborda como pregunta de investigación: ¿qué argumentos potencian la conexión entre los enfoques analítico y gráfico en la determinación de familias de curvas ortogonales? Para dar respuesta a la pregunta, se implementó la propuesta teórico-metodológica para reconstruir los tipos de argumentos de los estudiantes y sus razonamientos (Conner, Singletary, Smith, Wagner y Francisco, 2014).

Referentes conceptuales

Argumentación matemática

Existen diferentes posturas sobre el concepto de "argumentación" asociadas a contextos académicos (derecho, ciencias sociales, filosofía y matemáticas, entre otras). Un autor referente en esta investigación es Stephen Toulmin. En su obra, *Una introducción al razonamiento*, Toulmin define la argumentación como "la actividad completa de hacer aserciones, desafiarlas, soportarlas mediante la producción de razones, criticando esas razones, refutándolas y así sucesivamente" (Toulmin, Rieke y Janik, 1984, p. 14). Con base en esta postura, las investigaciones en el marco de la enseñanza y el aprendizaje de la matemática consideran que la argumentación es una habilidad básica que se desarrolla de manera progresiva a lo largo de la educación (Solar, 2018). Se caracteriza por su cualidad social y racional: cualquier persona la emplea, usando el lenguaje común, para convencer a una audiencia con razones vinculadas de manera lógica (Krummheuer, 1995; Knipping y Reid, 2015). En el contexto particular de la matemática, la argumentación está ligada al razonamiento y a la demostración (prueba matemática); sin embargo, no es equivalente a la última. La argumentación compromete al lenguaje común con el fin de convencer; en cambio, la demostración busca revelar la verdad o la validez de un razonamiento (Duval, 2000). Por citar un ejemplo de un razonamiento válido en matemáticas, el razonamiento deductivo permite construir conocimiento matemático y validarlo con base en un conjunto de reglas lógicas (por ejemplo, los silogismos lógicos).

Figura 1. Estructura y elementos de un argumento.



Fuente: adaptada de Toulmin (2003).

Con el fin de distinguir entre argumentación y argumento, definimos al último desde la postura de Toulmin (2003), como "la secuencia de afirmaciones y razones que, entre ellas establecen el contenido y la fuerza de la posición de la cual un ponente particular está argumentando" (p. 14). Desde la postura del autor, un argumento tiene una estructura no lineal (ver figura 1) constituida por seis elementos: la *aserción*, que se refiere a la afirmación o conclusión que establece el argumentador; los *datos*, que son la evidencia sobre la cual se fundamenta la aserción; la *garantía*, cuya función es conectar los datos con la aserción por medio de reglas, propiedades matemáticas, generalizaciones y características de los objetos matemáticos en estudio. A esta estructura se le conoce como el núcleo del argumento, presente en la argumentación colectiva de los estudiantes (Krummheuer, 1995). Sin embargo, algunas investigaciones evidencian la presencia de los elementos restantes en los niveles secundario y universitario, como el *respaldo*, que desempeña el papel de brindar un apoyo a la garantía mediante conocimiento validado en la comunidad matemática (por ejemplo, teoremas, axiomas y teorías); el *calificador modal*, presenta la fuerza del argumento desde frases como "siempre", "para todos los casos", "para todo 'x'", entre otros. Por último, la *refutación* tiene la función de presentar las excepciones de la aserción (Cervantes-Barraza, Cabañas-Sánchez y Ordoñez-Cuastumal, 2017; Cervantes-Barraza y Cabañas-Sánchez, 2018).

En el contexto de la argumentación matemática, Conner, Singletary, Smith, Wagner, y Francisco (2014) consideran que el razonamiento está estrechamente relacionado con la actividad de argumentar. En este artículo, concebimos el razonamiento matemático desde la postura de Conner et al. (2014), como inferencias intencionales sobre entidades matemáticas.[1] Aseguran los autores que, si un individuo formula un argumento, entonces, éste genera

1 Los autores refieren por el término "entidad matemática" en el sentido de Zbiek y Conner (2006) como "cualquier objeto matemático de cualquier área de las matemáticas curriculares" (p. 92).

un conjunto de razones. Con base en este punto de vista, el razonamiento está inmerso en los argumentos que refieren a una serie de afirmaciones o conclusiones que resultan de inferencias[2] sobre entidades matemáticas (por ejemplo, conceptos, objetos matemáticos y operaciones) (Conner et al., 2014). En línea con las ideas presentadas, promover la argumentación en clase de matemáticas fomenta implícitamente la emergencia de razonamientos en lo individual y en lo colectivo (Rojas-Drummond y Peon Zapata, 2004).

Tipos de argumentos

Resultado del proceso argumentativo, Zacharos, Pournantzi, Moutsios-Rentzos y Shiakalli (2016) consideran que los tipos de argumentos brindan una idea del razonamiento adoptado por los estudiantes en la transición de las formas informales del conocimiento al uso del lenguaje matemático. Para descubrir la relación entre diferentes tipos de argumentos, los autores recomiendan tener en cuenta los elementos de la argumentación: la garantía, el respaldo y las refutaciones (Schnell, 2014, p. 518). La garantía se considera como un elemento esencial del modelo de Toulmin, en razón de que evidencia el razonamiento matemático de los estudiantes y permite reconocer las propiedades, reglas matemáticas, patrones y generalidades matemáticas inmersas en su contenido (Singletary y Conner, 2015; Knipping, 2008).

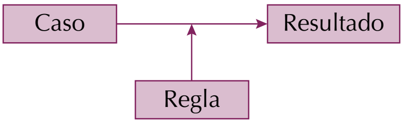
Los tipos de argumentos son implicados por un tipo particular de razonamiento: deductivo, inductivo, abductivo o de analogía desde el encuadre teórico que relaciona la argumentación con el razonamiento matemático (Conner et al., 2014). Estos autores integraron los elementos de un argumento (dato, garantía y aserción) (Toulmin, 2003) con los elementos del razonamiento propuestos por Pierce (1956): caso, regla y resultado, con la intención de estudiar el razonamiento matemático de los estudiantes. En el sentido de Pierce, el *caso* se refiere a una observación específica que contiene una condición, la *regla* es una proposición general que afirma (si una condición ocurre entonces la otra también) y el *resultado*, una observación que mantiene una condición relacionada con otra condición o por una regla (Conner et al., 2014). Para caracterizar los tipos de argumentos, presentamos una descripción de cada tipo y su estructura, con base en la propuesta de Conner et al. (2014).

Los argumentos deductivos refieren a la construcción de conclusiones o aserciones como consecuencias lógicas de supuestos

2 La inferencia se concibe como "el paso de proposiciones dadas como preliminares o hipótesis (las propuestas de entrada) a otra proposición (la conclusión) bajo una regla explícita o implícita" (Duval, 1999, p. 235).

o premisas previamente establecidos. En términos de la propuesta de Conner et al. (2014), las premisas se corresponden con los casos, datos o evidencia. En este tipo de argumento, el estudiante establece un resultado con base en inferencias matemáticas fundamentadas en propiedades, teoremas o axiomas matemáticos, que a la vez conforman el contenido de la garantía. La estructura básica del argumento deductivo (figura 2) se constituye por un resultado o una conclusión del argumentador, construido con base en una serie de inferencias matemáticas en términos de propiedades, teoremas o axiomas matemáticos. El caso o dato del argumento incluye casos particulares e información inicial que fundamentan la conclusión.

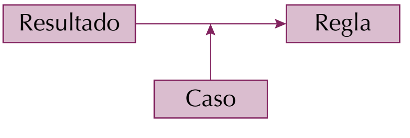
Figura 2. Argumento deductivo.



Fuente: Conner et al., 2014.

El argumento inductivo contiene generalizaciones que son producto del proceso de análisis y de abstracción sobre casos particulares. En este tipo de argumento los estudiantes construyen conjeturas basadas en generalizaciones establecidas sobre casos particulares analizados (Conner et al., 2014). La estructura de los argumentos inductivos (figura 3) se caracteriza por considerar los datos o información inicial como un conjunto de resultados sobre casos particulares. Con base en esto, el argumentador construye la generalización de los casos en términos de una regla matemática, de un patrón o de una definición (por ejemplo, la conclusión).

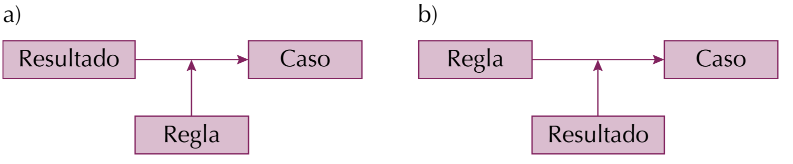
Figura 3. Argumento inductivo.



Fuente: Conner et al., 2014.

El argumento abductivo está compuesto por inferencias matemáticas que permiten construir un resultado a partir de un hecho matemático observado. Este tipo de argumento se caracteriza por procesos de razonamiento contrarios al deductivo, es decir, se razona de adelante hacia atrás. La estructura de este tipo de argumento (figura 4) se presenta de dos formas: 1) a partir de los resultados, el argumentador infiere caso(s) con base en una regla matemática definida (ver figura 4a); 2) con base en una regla matemática se puede inferir un caso fundamentado desde los resultados (ver figura 4b).

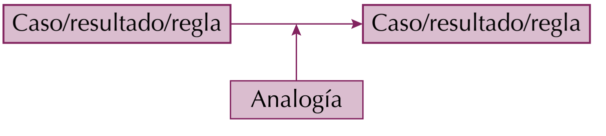
Figura 4. Estructura de argumentos de tipo abductivo.



Fuente: Conner et al., 2014.

El argumento de analogía recae en la construcción de una conclusión basada en observar similitudes estructurales o de contenido entre casos correspondientes. El razonamiento inmerso en este tipo de argumento remite a la similitud entre procedimientos en la solución de ejercicios y permite identificar una ruta para solucionar el ejercicio, desde tres posibles formas en las que se aplica una analogía: 1) partiendo de los casos para llegar a un resultado, 2) partir de resultados y arribar a casos, 3) partir de resultados y arribar a la regla que determina el ejercicio (figura 5). En suma, en este tipo de razonamiento, el caso, el resultado o la regla pueden ser punto de partida, es decir, los datos de la argumentación de igual manera pueden ser una aserción.

Figura 5. Argumento de analogía.



Fuente: Conner et al., 2014.

Las ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO)

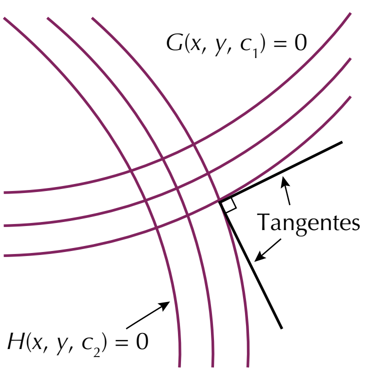
Una ecuación diferencial se define como una ecuación que contiene derivadas de una o más variables dependientes con respecto a una o más variables independientes. Las ecuaciones diferenciales se clasifican según su orden, tipo o linealidad (Zill, 1997). Si una ecuación sólo contiene una derivada ordinaria de una o más variables dependientes con respecto a una sola variable independiente, entonces se dice que es una ecuación diferencial ordinaria (EDO). La clasificación, según el orden de la ecuación, es con respecto a la derivada de mayor orden en la ecuación. En relación con las EDO, se entiende que las familias de curvas son trayectorias ortogonales entre sí (figura 6), cuando todas las curvas de una familia $G(x, y, c1) = 0$ cortan ortogonalmente todas las curvas de otra familia $H(x, y, c2) = 0$. Además, si

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

es la ecuación diferencial de una familia, la ecuación diferencial de sus trayectorias ortogonales es

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{f(x, y)}$$

Figura 6. Familia de curvas ortogonales.



Fuente: Zill, 1997.

Metodología de la investigación

Esta investigación adopta el paradigma de diseño (Molina, Castro, Molina y Castro, 2012; Steffe y Thompson, 2000), cuya naturaleza es primordialmente cualitativa y enmarca el experimento de enseñanza (*Teaching Experiment*). En esta investigación se diseñó y desarrolló un experimento de enseñanza, que consiste en episodios de enseñanza grabados en video en los que interviene un profesor investigador ante un estudiante o un grupo, con el objetivo de experimentar de primera mano el aprendizaje y el razonamiento matemático (Steffe y Thompson, 2000, p. 267).

Participantes

El experimento de enseñanza se desarrolló con un grupo de tres estudiantes de sexto semestre del programa de la licenciatura en matemáticas matriculados en una universidad pública ubicada al sur de México. Los estudiantes fueron seleccionados por el profesor encargado del curso de ecuaciones diferenciales. Como criterio de selección se propuso la participación voluntaria de tres estudiantes con rendimiento académico bajo, intermedio y alto, según las calificaciones obtenidas en cursos previos, y que además el profesor titular reconociera que habían demostrado en clase tener conocimientos sobre cálculo diferencial, integral, vectorial y álgebra lineal obtenidos de cursos tomados en los semestres anteriores. En la ejecución del experimento participó uno de los autores de este artículo en el rol de profesor, junto con un investigador auxiliar para apoyar en la toma de datos, la repartición de las tareas, la toma de notas de campo y la triangulación de los resultados.

Experimento de enseñanza

El experimento de enseñanza en esta investigación se diseñó con base en las fases planteadas por Molina, Castro, Molina y Castro (2012). La primera fase consistió en la preparación del experimento; en la fase dos, se presenta cómo se desarrollaron las tareas y, en la fase tres, se analizan los datos con respecto al método del análisis. En el cuadro 1 se muestra la descripción detallada de cada fase.

Tareas del experimento de enseñanza

El experimento de enseñanza está conformado por dos tareas referentes al estudio de familias de curvas ortogonales. La primera tarea, de carácter exploratorio (tarea previa), se diseñó con el objetivo de recuperar y familiarizar conceptos claves relacionados con el estudio de las familias de curvas ortogonales. En cuanto a la tarea matemática (T), involucró a los estudiantes para resolver un problema que implica ecuaciones diferenciales para hallar familias de curvas mutuamente ortogonales. La aplicación y el desarrollo de la tarea previa y la tarea T demandaron, cada una, dos horas reloj. En un primer momento, el profesor investigador propuso a los estudiantes resolver la tarea previa y, al término de ésta, hizo una retroalimentación basada en las respuestas presentadas. Para desarrollar la tarea matemática, el profesor investigador les facilitó computadoras a los estudiantes y la tarea matemática impresa. Los estudiantes emplearon una hora

Cuadro 1. Descripción de las fases del experimento de enseñanza.

Experimento de enseñanza		
Fase 1	*Preparación del experimento*	• Planteamiento del problema sustentado en la teoría. • Elección del tema a estudiar en las tareas. • Diseño de las tareas. • Ejecución de la prueba piloto. • Rediseño de las tareas.
Fase 2	*Desarrollo de las tareas*	• Las tareas se desarrollaron a nivel individual. • En lo colectivo, los estudiantes expresaron sus argumentos basados en el trabajo individual. • Al final de la sesión, los investigadores se reunían para platicar aspectos a considerar en el análisis.
Fase 3	*Análisis retrospectivo de los datos*	• Análisis cualitativo-descriptivo basado en datos. • Reconstrucción de la argumentación y clasificación de los tipos de argumentos con base en la propuesta metodológica de Conner et al. (2014).

Fuente: Elaboración propia de los autores.

reloj para resolver la tarea, luego el profesor investigador generó un ambiente propicio para compartir las respuestas: con la intención de generar la argumentación entre los estudiantes, proyectó el trabajo escrito y lo realizado en GeoGebra por cada estudiante sobre la pizarra, con la ayuda de un proyector.

Tarea matemática (T)

Con el apoyo del *software* GeoGebra, al escoger unos valores del parámetro c, traza algunas curvas de la familia dada por la ecuación a). En otra hoja de GeoGebra, también al escoger unos valores del parámetro c, traza algunas curvas de la familia dada por la ecuación b).

Luego encuentra algebraicamente la familia de curvas ortogonales a cada una de las familias anteriores.

$$x + 2y = c \qquad \text{(a)}$$
$$x^2 + 2y^2 = c \qquad \text{(b)}$$

I. ¿Visualmente qué se puede inferir al trazar rectas tangentes a cada una de las curvas por el punto de intersección de las mismas? Explique ampliamente.
II. Al comparar las pendientes de las rectas tangentes a las curvas en un punto de intersección, ¿qué se puede concluir? Explique ampliamente.
III. ¿Cómo puedes relacionar lo algebraico y lo gráfico del cálculo de las curvas ortogonales?

Con base en la problemática planteada en este artículo, el diseño de las tareas es fundamental, porque son el medio promotor de la construcción de argumentos y razonamientos que involucran la faceta analítica con la gráfica. Desde el diseño de la tarea y los referentes conceptuales planteados, se busca que los estudiantes conecten la faceta analítica con la gráfica sobre la base de un problema que se resuelve con ecuaciones diferenciales y preguntas que llevan a los estudiantes a reflexionar sobre la relación de cada procedimiento junto con la parte conceptual y su significado en el contexto de lo gráfico.

Análisis de los datos empíricos

El análisis de los datos se realizó bajo un enfoque cualitativo basado en la reconstrucción de la argumentación de los estudiantes. Para ello, se empleó el modelo teórico-metodológico propuesto por Conner et al. (2014). Se tomaron las transcripciones de la sesión y se enumeró cada línea con el fin de identificar los segmentos donde los estudiantes (E1, E2, E3) argumentaron sobre cómo resolvieron el problema y dieron respuesta a los requerimientos planteados en términos de las preguntas de las tareas matemáticas I, II y III (cuadro 2).

Como parte del análisis *a priori* sobre la tarea matemática planteada a los estudiantes, se presenta una descripción de la solución clásica que relaciona las familias de curvas ortogonales. Para encontrar una familia de curvas ortogonales a la ecuación: $x+2y=c$, se deriva cada miembro con respecto a la variable "x". De ello obtenemos la ecuación diferencial: $1+2y'=0$, despejando el término y' que es equivalente a las notaciones

$$\frac{dy}{dx} \quad \text{y} \quad f(x, y),$$

tenemos que:

$$y' = -\frac{1}{2}.$$

Encontramos que la función derivada de la ecuación inicial es igual a menos un medio. Ahora, con este resultado, y aplicando la fórmula

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{f(x,y)},$$

tenemos que la ecuación diferencial correspondiente a la familia de curvas ortogonales a la inicial es:

Cuadro 2. Ejemplo del análisis de los datos.

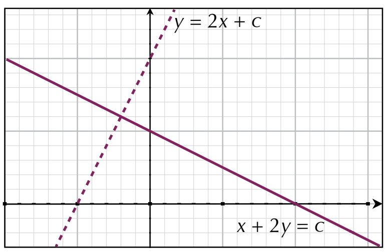
Transcripción

Profesor: ¿Cómo puedes relacionar lo algebraico y lo gráfico de las curvas ortogonales?
E3: En lo gráfico, vemos el comportamiento de las gráficas y a partir de allí determinamos sus tangentes y con lo gráfico vemos también que las rectas tangentes son ortogonales. Con lo algebraico determinamos una familia ortogonal a la función dada, lo algebraico para comparar los valores de las pendientes y ver que son recíprocas.

Reconstrucción de la argumentación

Datos

CASO: ¿cómo puedes relacionar lo algebraico y lo gráfico de las curvas ortogonales?



Garantía

Conclusión

RESULTADO: las rectas tangentes son ortogonales.

REGLA: en lo gráfico vemos el comportamiento de la gráficas y a partir de allí determinamos sus tangentes.

REGLA: con lo algebraico determinamos una familia ortogonal a la función dada, lo algebraico para comparar los valores de las pendientes y ver que son recíprocas.

Profesor

Ambos

E3

Fuente: Elaboración propia de los autores.

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\left(-\frac{1}{2}\right)}$$

equivalente a

$$\frac{dy}{dx} = 2$$

Integrando en cada miembro de la ecuación diferencial obtenemos la expresión matemática $y = 2x + c$, que representa la familia de curvas ortogonales a la inicial.

La solución de esta tarea comprende dos familias de rectas con pendientes respectivas ($-1/2$) y 2. Sin embargo, el enunciado se refiere a curvas, por lo que se constató, antes de la experimentación con el profesor encargado de la materia, que los estudiantes consideraran que las rectas son curvas y con esto se evitara una interpretación errada de los resultados de este primer problema.

Los tipos de argumentos se identificaron con base en el contenido de las garantías y el orden en que los estudiantes procedieron, esto en función de lo establecido en Conner et al. (2014). El argumento deductivo se identificó cuando los estudiantes partieron de un caso o una información inicial para inferir, con base en propiedades matemáticas, definiciones o reglas, y establecer un resultado o una conclusión. Identificamos los argumentos abductivos cuando los estudiantes usan resultados obtenidos para inferir información inicial en términos de datos. Se identificaron los argumentos inductivos al reconocer generalizaciones sobre casos particulares, y los argumentos de analogía, cuando los estudiantes determinaron una conclusión con base en la comparación de estructuras similares de los problemas previos.

En el cuadro 2 se presenta la estructura de un argumento inductivo construido por el estudiante E3 en respuesta a la pregunta del profesor. Los datos de este argumento se fundamentan en la pregunta del profesor y la gráfica que el estudiante construyó para verificar desde la representación gráfica que las curvas son ortogonales (conclusión). Este argumento es de tipo inductivo, porque desde el análisis de casos particulares decanta la invariante sobre la medida de los ángulos entre las familias de rectas, y con esto reconoce que las curvas son ortogonales.

En la estructura del argumento, la participación de los estudiantes y del profesor se reconoce desde las convenciones que indica quién hizo la contribución. Las intervenciones del profesor se presentan con rectángulos de líneas gruesas; la participación de los estudiantes se representó con líneas segmentadas; y, cuando participaron ambos, usamos rectángulos con líneas dobles.

Resultados

Como parte de los resultados de la investigación, se presentan los argumentos y los respectivos razonamientos empleados por los estudiantes en la solución de problemas sobre familias de curvas ortogonales. Se presentan también casos relativos a los razonamientos de los estudiantes en la solución de la tarea matemática (T).

Argumentos de tipo deductivo

En la solución del inciso a) de la tarea matemática se identificó que los estudiantes construyeron argumentos de tipo deductivo (ver figura 7). Como hecho representativo, el estudiante E1 partió del caso, es decir, de la familia de curvas proporcionada en el ítem a) de la tarea matemática, para inferir la función derivada con base en la definición y la regla de derivación de potencias (procedimiento algebraico-analítico). También recurrió a la relación de ortogonalidad que implica que el producto de las pen-

Figura 7. Procedimiento y argumento de tipo deductivo, inciso a).

Procedimiento

Derivó con respecto a "x"

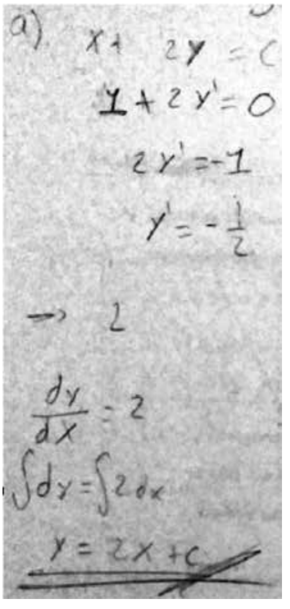
Función derivada

Pendiente recíproca de (–1/2)

Ecuación diferencial

Integra por separación de variables

Familia de curvas ortogonales



Argumento

Dato

CASO: la familia de curvas $x + 2y = c$.

Conclusión

RESULTADO: familia de curvas ortogonales es $y = 2x + c$.

Garantía

REGLA: las pendientes son perpendiculares, o sea que una pendiente es recíproca y de signo contrario con respecto a la otra.

Profesor

Ambos

E1

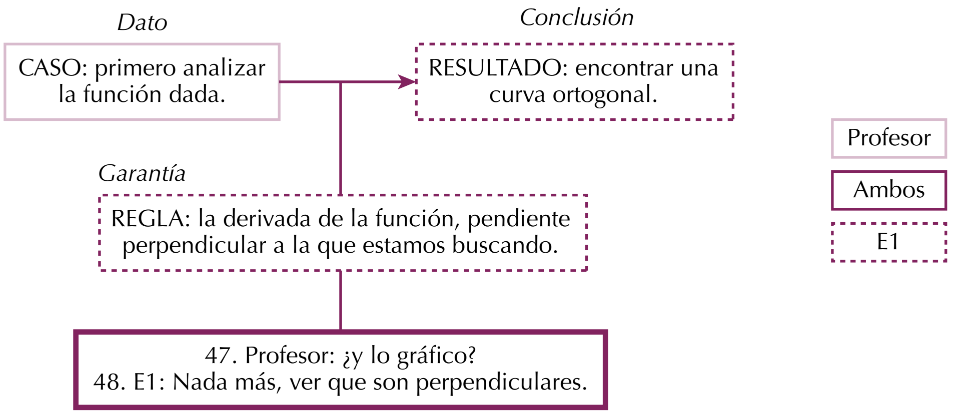
Fuente: Elaboración propia de los autores.

dientes de las rectas sea igual a menos uno y con esto construye la ecuación diferencial cuya solución es la familia de curvas ortogonales a la inicial (para este caso, una familia de rectas).

El razonamiento inmerso en este tipo de argumento se refleja en el procedimiento para resolver el problema sobre la familia de curvas ortogonales. De manera implícita, el estudiante construye conclusiones como consecuencias lógicas de supuestos o premisas previamente establecidas, como es el caso de las fórmulas de derivación, integración, relación de rectas paralelas y perpendiculares, entre otras. Tanto en el procedimiento como en el argumento presentado por el estudiante, se observa un orden en los pasos que conducen a nuevas conclusiones.

En un segundo momento de la solución de la tarea, el profesor les pidió a los estudiantes una lista de pasos para determinar la familia de curvas ortogonales a una dada, en éstos se refleja igualmente el razonamiento deductivo (figura 8). Los pasos mencionados por los estudiantes son: 1) análisis de la familia de curvas dadas, encontrar la ecuación de la recta tangente a la curva (cálculo de la derivada) e identificar la pendiente de la recta y el valor recíproco para, finalmente, resolver la ecuación diferencial con base en la integración y algunas operaciones algebraicas que permiten identificar la familia de curvas ortogonales.

Figura 8. Ejemplo de un argumento de tipo deductivo, inciso b).



Fuente: Elaboración propia de los autores.

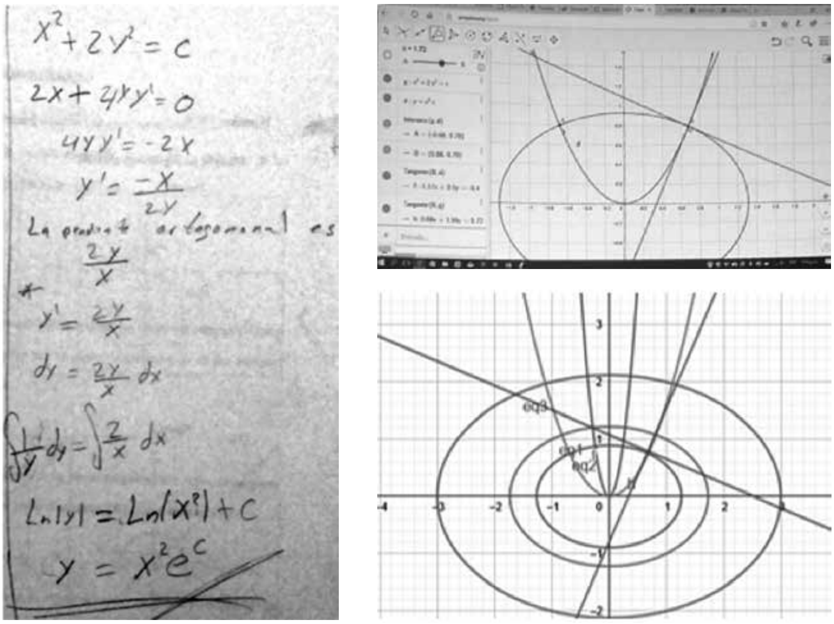
Como parte de la lista de pasos propuestos por los estudiantes, el alumno E1 analizó el tipo de función que representa la familia de curvas, reconoció si era una función lineal y/o cuadrática, para determinar la ecuación de la recta tangente a la curva mediante la derivada de la función dada. El siguiente paso consistió en construir la ecuación diferencial que representara la familia de rectas con pendiente recíproca, que al integrarla le garantizara desde lo analítico encontrar la familia de curvas ortogonales a la dada (ver figura 9). En soporte de la garantía del argumento del estudiante E1, se identificó que el conjunto de representaciones gráficas de las funciones (ver figura 9) refiere al enfoque gráfico y a la evidencia adicional que cumplen la función de respaldo (*backing*, en inglés), esto es, un medio por el cual los estudiantes verifican que la familia de curvas encontrada es ortogonal a la inicial.

Argumentos de tipo abductivo

Este tipo de argumento se identificó en las respuestas de los estudiantes ante las cuestiones I, II y III de la tarea matemática. Además, se reconocen las dos formas de un argumento abductivo (tipo A y tipo B). El argumento abductivo de tipo A se identificó a partir de una regla o regularidad entre los objetos matemáticos en estudio para determinar un caso particular. Un ejemplo de este tipo de argumento es el que construyó E2 (figura 10), quien consideró la regularidad: "si no lo haces correcto, es una forma de darte cuenta que cometiste un error", como punto de partida para concluir que las familias de curvas encontradas efectivamente son ortogonales. La garantía de este argumento refiere a

Figura 9. Procedimiento de E1 y gráfica de algunas curvas ortogonales a una familia de curvas dadas, inciso b).

Procedimiento *Gráficas de algunas curvas ortogonales*



Fuente: Elaboración propia de los autores.

Figura 10. Ejemplo de un argumento abductivo tipo A.

Dato

REGLA: así que gráficamente vemos que las rectas son perpendiculares. Siento que lo algebraico *si no lo haces correcto, es una forma de darte cuenta que cometiste un error,* dependiendo de tu procedimiento.

Conclusión

CASO: familia de curva encontrada es ortogonal.

Garantía

RESULTADO: gráficamente, primero graficamos la función que nos dan, la función que encontramos, después los puntos de intersección y vemos que las pendientes en los puntos de intersección de cada curva, ya sólo confirmamos que las pendientes sean perpendiculares.

Profesor

Ambos

E2

Fuente: autores.

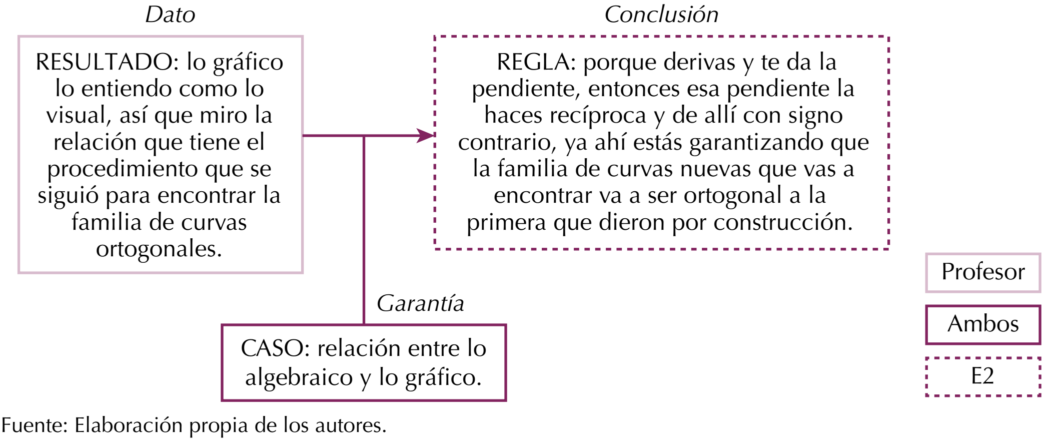
resultados obtenidos del análisis de las características invariantes de las gráficas, que a la vez sirven como verificador del procedimiento algebraico que se llevó a cabo.

En el argumento abductivo tipo B (figura 11), los estudiantes parten de sus resultados para examinar el caso, es decir, ¿qué garantiza que la familia de curvas encontradas sea la familia ortogonal? El estudiante E2 toma como base lo gráfico, equivalente al conjunto de algunas gráficas de las funciones encontradas y compara las respectivas rectas tangentes para verificar que la familia de curvas hallada es ortogonal a la inicial.

Discusión y conclusiones

Con base en el análisis de la reconstrucción de la argumentación, se identificó una secuencia de pasos para encontrar la familia de curvas ortogonales a una inicial. Los estudiantes derivaron con respecto a "x" la ecuación inicial de la familia de curvas dada para hallar la pendiente de la recta y su respectivo recíproco. Con lo anterior, plantearon la ecuación diferencial que representa la familia de curvas ortogonales a la familia de curvas dadas. El razonamiento empleado por los tres estudiantes en la resolución de la tarea matemática se basa en la construcción de una conclusión (familia de curvas ortogonales a la inicial) desde un conjunto de pasos lógicos (procedimientos matemáticos: cálculo de la derivada, determinar la pendiente de la recta perpendicular a la dada, integrar con respecto a "x" y operar algebraicamente para encontrar la familia de curvas ortogonales). Es decir, el argumento que usaron los estudiantes para encontrar una familia de curvas ortogonales a una familia dada es el argumento deductivo. En este tipo de argumentos los estudiantes relacionan lo gráfico con lo algebraico, en razón de que después de los procedimientos algebraicos recurrieron a representar gráficamente la familia de curvas para validar si lo analítico se correspondía con la gráfica.

Figura 11. Ejemplo de un argumento abductivo tipo B.



Fuente: Elaboración propia de los autores.

Cuando a los estudiantes se les pide relacionar lo algebraico del cálculo de la familia de curvas ortogonales con lo gráfico, recurren al razonamiento abductivo de tipo A y de tipo B (Conner et al., 2014). En el razonamiento de tipo A, los estudiantes parten de la regla: si visualmente las rectas son perpendiculares, entonces la familia de curvas encontrada es ortogonal a la primera. En relación con el razonamiento abductivo de tipo B, los estudiantes parten de las gráficas de las familias de curvas y sus rectas tangentes para relacionarlas con la regla matemática. Esto implicó que los estudiantes garantizaran que la familia de curvas es ortogonal mediante la derivada de la ecuación de la familia de curvas inicial, la cual se hace recíproca, para luego determinar la ecuación de la familia de curvas ortogonales verificada desde su representación gráfica.

El estudio de los argumentos que construyen los estudiantes en la resolución de las EDO permitió identificar argumentos de dos tipos: deductivo y abductivo. En apartados anteriores se infiere que, tanto el razonamiento deductivo como el abductivo relacionan los enfoques desconectados que indica la literatura. En particular, los argumentos abductivos se reconocen como un medio que permite evidenciar cómo lo visual (gráficas de las familias de curvas) involucra lo algebraico. Esto puede entenderse desde Nápoles et al. (2002). Lo geométrico implica una resolución cualitativa del problema, y lo algebraico determina la parte analítica. En efecto, la abducción cumple la función de puente entre las facetas algebraica-numérica y gráfica, donde el estudiante, por medio de su trabajo, atribuye significado a las gráficas de la familia de curvas; y también a la solución de problemas de ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO), como son los problemas de cálculo de curvas ortogonales.

Los resultados de la presente investigación no sólo permiten dilucidar los argumentos de los estudiantes construidos en el contexto de la solución de EDO, sino que evidencian los enfoques y razonamientos empleados por los estudiantes. Además, el tipo de tarea que se propuso permitió que los estudiantes conectaran los enfoques haciendo de éstos una concatenación evidenciada en el argumento abductivo. En efecto, los resultados empíricos reportados no reflejan una solución única a la problemática planteada, sino que proporcionan un camino para mejorar la enseñanza y el aprendizaje de las EDO, con base en tareas matemáticas que promuevan la conexión de los enfoques.

Se declara que no existe conflicto de intereses respecto a la presente publicación.

Referencias bibliográficas

Cervantes-Barraza, J. A., Cabañas-Sánchez, G. C., y Ordoñez-Cuastumal, S. (2017). El poder persuasivo de la refutación en argumentaciones colectivas. *Bolema, Rio Claro (SP), 31*(59), 861-879.

Cervantes-Barraza, J. A., y Cabañas-Sánchez, G. (2018). Argumentos formales y visuales en argumentaciones colectivas. *Educación Matemática, 30*(1), 148-168.

Conner, A., Singletary, S. L., Smith, R. C., Wagner, P., y Francisco, R. (2014). Identifying Kinds of Reasoning in Collective Argumentation. *Mathematical Thinking and Learning, 16*(3), 181-200.

Contreras, L. A. J., y Escobar, R. F. C. (2012). Propuesta de actividades para la enseñanza de las ecuaciones diferenciales, con variables separables mediante el apoyo de *software* libre "geogebra". *Ecomatemático*, *3*(1), 28-29.

Dullius, M. M., Araujo, I. S., y Veit, E. A. (2011). Teaching and Learning of Differential Equations with Graphical, Numerical and Analytical Approach: an experience in Engineering courses. *Bolema-mathematics education bulletin-boletim de educação matemática*, *24*(38), 17-42.

Duval, R. (1991). Estructure de raisonnement deductif et apprentissage de la démostration. *Educational Studies in Mathematics*, 22, 233-261.

Duval, R. (2000). Ecriture, raisonnement et découverte de la démonstration en mathématiques, *Recherche en Didactique des Mathématiques, 20*(2), 135-170.

Knipping, C. A. (2008). Method for revealing structures of argumentations in classroom proving processes. *ZDM Mathematics Education, 40*(3), 427-441.

Knipping, C., y Reid, D. (2015). Reconstructing argumentation structures: A Perspective on proving Processes in Secondary Mathematics Classroom Interactions. En A. Bikner-Ahsbahs, C. Knipping y N. Presmeg (Eds.), *Approaches to Qualitative Research in Mathematics Education: Examples of methodology and methods* (pp. 75-101). Dordrecht, NL: Springer. Doi: 10. 1007/978-94-017-9181-6. 2015.

Krummheuer, G. (1995). The ethnology of argumentation. En: P. Cobb y H. Bauersfeld (Eds.). *The Emergence of Mathematical Meaning: Interaction in Classroom Cultures*. pp. 229-269, Hillsdale, MI: Erlbaum.

Krummheuer, G. (2013). The relationship between diagrammatic argumentation and narrative argumentation in the context of the development of mathematical thinking in the early years. *Educational Studies in Mathematics, 84*(2), 249-265.

Lavy, I. A. (2006). Case Study of Different Types of Arguments Emerging from Explorations in an Interactive Computerized Environment. *Journal of Mathematical Behavior, 25*(2), 153-169.

Lin, P. J. (2018). The Development of Students' Mathematical Argumentation in a Primary Classroom. *Educação e Realidade, Porto Alegre, 43*(3), 1171-1192. http://dx.doi.org/10.1590/2175-623676887

Molina, M., Castro, E., Molina, J., y Castro, E. (2012). Un acercamiento a la investigación de diseño a través de los experimentos de enseñanza. *Enseñanza de la ciencia, 29*(1), 75-88.

Molina, O., Font, V., y Pino-Fan, L. (2019). Estructura y dinámica de argumentos analógicos, abductivos y deductivos: un curso de geometría del espacio como contexto de reflexión. *Enseñanza de las ciencias, 37*(1), 93-116.

Moshman, D. (2004). From inference to reasoning: The construction of rationality. *Thinking & Reasoning, 10*(2), 221-239.

Nápoles Valdés, J. E., González Thomas, A., Brundo, J. M., Genes, F., y Basabilbaso, F. (2004). El enfoque histórico-problémico en la enseñanza de la matemática para ciencias técnicas: el caso de las ecuaciones diferenciales ordinarias. *Acta Scientiae*, *6*, 41-59.

Peirce, C. S. (1956). Sixth paper: Deduction, induction, and hypothesis. En M. R. Cohen (Ed.), *Chance, Love, and Logic: Philosophical Essays* (pp. 131-153). Nueva York, NY: G. Braziller (Original publicado en 1878).

Rasmussen, C. L. (2001). New directions in differential equations a framework for interpreting students' understandings and difficulties. *Journal of Mathematical Behavior, 20*, 55-87.

Rodríguez, G, R., y Quiroz, S. (2016). El papel de la tecnología en el proceso de modelación matemática para la enseñanza de las ecuaciones diferenciales. *RELIME. Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, *19*(1), 99-124.

Rojas-Drummond, S., y Peon, M. (2004). Exploratory Talk, Argumentation and Reasoning in Mexican Primary School Children. *Language and Education*, *18*(6), 539-557, doi: 10.1080/09500780408666900

Schnell, S. (2014). Types of arguments when dealing with chance experiments. En C. Nicole, S., Oesterle, P., Lijedahl, D. Allan (Eds.), *Proceedings of the Joint Meeting of PME 38 and PME-NA 36,* vol. 5, pp. 113-120. Vancouver, Canadá.

Singletary, L. M., y Conner, A. M. (2015). Focusing on Mathematical Arguments. *Mathematics teacher*, *109*(2), 143-147.

Solar-Bezmalinovic, H. (2018). Implicaciones de la argumentación en el aula de matemáticas. *Revista Colombiana de Educación*, 74, 155-176.

Steffe, L. P., y Thompson, P. W. (2000). Teaching experiment methodology: Underlying principles and essential elements. En R. Lesh y A. E. Kelly (Eds.), *Research design in mathematics and science education* (pp. 267-307). Hillsdale, MI: Erlbaum,

Stephan, M., y Rasmussen, C. (2002). Classroom mathematical practices in differential equations. *Journal of Mathematical Behavior*, *21*, 459-490.

Suarez, C., Jaimes, L., y Chávez, F. (2016). Modelos de aplicación de ecuaciones diferenciales de primer orden con geogebra: actividades para resolver problemas de mezclas. *Mundo Fesc*, *11*, 7-15.

Toulmin, S., Rieke, R., y Janik, A. (1984). *An Introduction to Reasoning*. Nueva York, NY: Macmillan.

Toulmin, S. (1958/2003). *The uses of argument*. Nueva York, NY: Cambridge University Press.

Valdés, J. E. N., Thomas, A. G., Genes, F., Basabilbaso, F., y Brundo, J. (2012). El enfoque histórico-problémico en la enseñanza de la matemática para ciencias técnicas: el caso de las ecuaciones diferenciales ordinarias. The Historical-problematic Approach in the Teaching of Mathematics for Technical Sciences: the Case of Ordinary. *ACTA SCIENTIAE*, *6(2),* 41-60.

Van Ness, C., y Maher, C. (2018). Analysis of the argumentation of nine-year-olds engaged in discourse about comparing fraction models. *The Journal of Mathematical Behavior*, *5*(3), 1-29.

Zacharos, K., Pournantzi, V., Moutsios-Rentzos, A., y Shiakalli, M. (2016). Forms of argument used by pre-school children. *Educational Journal of the University of Patras UNESCO Chair*, *3*(2), 167-178.

Zill, D. G. (1997). *Ecuaciones diferenciales* (6ta ed.). Ciudad de México, MX: Thomson.

Zbiek, R. M., y Conner, A. (2006). Beyond motivation: Exploring mathematical modeling as a context for deepening students' understandings of curricular mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *63*(1), 89-112.