Cálculo integral: Respuestas correctas

Aprovecha al máximo esta sección de tu Guía de Estudio. Para ello te invitamos a que sigas estos pasos:

- ✓ Resuelve todos tus ejercicios antes de consultar esta sección.
- ✓ Una vez que hayas concluido, coteja tus resultados con la argumentación de la respuesta correcta que aparece aquí.
- ✓ Solicita apoyo de tus profesores o acude a recursos en línea para comprender conceptos, términos o procedimientos descritos en esta sección que aún no tengas claros.

Justificación de las respuestas correctas

1 Respuesta correcta: B

Dada la derivada

$$F'(x)=\frac{4x^3}{2}-5x^{-2}+2$$

La función original $F(x)$ se obtiene integrando, es decir:

$$F(x)=\int F'(x)dx=\int\left(\frac{4x^3}{2}-5x^{-2}+2\right)dx$$

Entonces,

$$F(x)=\frac{4}{2}\left(\frac{x^{3+1}}{3+1}\right)-5\left(\frac{x^{-2+1}}{-2+1}\right)+2x+C$$

$$F(x)=\frac{x^4}{2}+\frac{5}{x}+2x+C$$

2 Respuesta correcta: D

Integramos ambos lados de la igualdad:

$$\int F'(x)\,dx=\int(3x+7)^2\,dx$$

$$F(x)=\frac{(3x+7)^{2+1}}{2+1}\cdot\frac{1}{3}=\frac{(3x+7)^3}{9}+C$$

y desarrollando el binomio al cubo se obtiene:

$$F(x)=\frac{(3x)^3+3(3x)^2\cdot 7+3(3x)\cdot 7^2+7^3}{9}=\frac{27x^3+189x^2+441x+343}{9}+C$$

$$F(x) = 3x^3 + 21x^2 + 49x + \frac{343}{9} + C$$

3	Respuesta correcta: B

Primero, obtenemos f(x) integrando

$$f(x) = \int f'(x)dx$$

$$f(x) = \int\left(2x^2 + \sqrt{x}\right)dx = \int\left(2x^2 + x^{1/2}\right)dx$$

$$f(x) = 2\left(\frac{x^3}{3}\right) + \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C$$

$$f(x) = \frac{2}{3}\left(x^3 + \sqrt{x^3}\right) + C$$

Si la gráfica de $f(x)$ pasa por el punto (1,2), entonces:

$$f(1) = 2$$

$$\frac{2}{3}\left(1^3 + \sqrt{1^3}\right) + C = 2$$

$$\frac{4}{3} + C = 2$$

$$C = \frac{2}{3}$$

Por lo tanto, el valor que debe tener la constante de integración para que la gráfica pase por el punto (1,2) es:

$$C = \frac{2}{3}$$

4	Respuesta correcta: C

Primero, integramos la ecuación dada para obtener $F(x)$:

$$F'(x) = \frac{1}{x^2}$$

$$\int F'(x)dx = \int \frac{dx}{x^2}$$

$$F(x) = -\frac{1}{x} + C$$

Buscamos la solución particular que cumple

$$F(1) = 0$$

Entonces,

$$-\frac{1}{1} + C = 0$$

$$C = 1$$

Sustituyendo este valor de C en $F(x)$ obtenemos la solución al ejercicio:

$$F(x) = -\frac{1}{x} + 1$$

$$F(x) = 1 - \frac{1}{x}$$

5	Respuesta correcta: A

Expresamos la integral de la forma

$$\int \frac{dx}{x\ln(3x)} = \int \frac{\frac{dx}{x}}{\ln(3x)}$$

y aplicando el cambio de variable

$$u = \ln|3x| \;\Rightarrow\; du = \frac{3dx}{3x} = \frac{dx}{x}$$

La integral se reduce a

$$\int \frac{\frac{dx}{x}}{\ln(3x)} = \int \frac{du}{u}$$

Usando la fórmula

$$\int \frac{du}{u} = \ln(u) + C$$

obtenemos:

$$\int \frac{dx}{x\ln(3x)} = \ln(\ln(3x)) + C$$

6	Respuesta correcta: A

1. Para resolver la integral $\int \frac{dx}{2x^2+4}$

   Usamos la fórmula de integración: $\int \frac{du}{u^2+a^2} = \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{u}{a}\right) + C$ **(1D)**

2. Para resolver la integral $\int \frac{xdx}{2x^2-4}$

   Usamos la fórmula de integración: $\int \frac{du}{u} = \ln|u| + C$ **(2A)**

3. Para resolver la integral $\int \frac{xdx}{\left(x^2-4\right)^2}$

   Usamos la fórmula de integración: $\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C;\ n \neq -1$ **(3B)**

4. Para resolver la integral $\int \frac{dx}{2x^2-4}$

Usamos la regla de integración: $\int \frac{du}{u^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right| + C$ **(4C)**

Por lo tanto, la asociación correcta es la que se expresa en el inciso A.

7	**Respuesta correcta: B**

Expresamos la integral como

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+4}} = \int (x^2+4)^{-1/2} \cdot x\,dx$$

Aplicando el cambio de variable

$$u = x^2+4 \quad \Rightarrow \quad du = 2xdx$$

$$u = x^2+4 \Rightarrow \quad \frac{du}{2} = xdx$$

La integral queda

$$\int (x^2+4)^{-1/2} \cdot x\,dx = \int u^{-1/2} \cdot \frac{du}{2} = \frac{1}{2}\int u^{-1/2}\,du$$

Usando la fórmula

$$\int u^n\,du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C \qquad (n \neq -1)$$

tenemos

$$\frac{1}{2}\int u^{-1/2}\,du = \frac{1}{2} \cdot \frac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = \sqrt{u} + C$$

Entonces,

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+4}} = \sqrt{x^2+4} + C$$

8	**Respuesta correcta: A**

Racionalizamos la expresión

$$\frac{2x}{\sqrt{2x^2-4}+\sqrt{2x^2+4}}\left(\frac{\sqrt{2x^2-4}-\sqrt{2x^2+4}}{\sqrt{2x^2-4}-\sqrt{2x^2+4}}\right)$$

$$\frac{2x\sqrt{2x^2-4}-2x\sqrt{2x^2+4}}{2x^2-4-2x^2-4} = \frac{2x\sqrt{2x^2-4}-2x\sqrt{2x^2+4}}{-8}$$

$$\int\left(\frac{2x\sqrt{2x^2-4}-2x\sqrt{2x^2+4}}{-8}\right)dx$$

Separamos las integrales

$$-\frac{1}{4}\int x\sqrt{2x^2-4}dx + \frac{1}{4}\int x\sqrt{2x^2+4}dx$$

completamos los diferenciales

$$-\frac{1}{16}\int \sqrt{2x^2-4} \cdot (4x\,dx) + \frac{1}{16}\int \sqrt{2x^2+4} \cdot (4x\,dx)$$

y calculamos las integrales

$$-\frac{1}{16}\cdot\frac{2}{3}(2x^2-4)^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{16}\cdot\frac{2}{3}(2x^2+4)^{\frac{3}{2}}+C$$
$$-\frac{1}{24}(2x^2-4)^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{24}(2x^2+4)^{\frac{3}{2}}$$
$$\frac{1}{24}\left[(2x^2+4)^{\frac{3}{2}}-(2x^2-4)^{\frac{3}{2}}\right]$$

9	Respuesta correcta: D

Para resolver la integral utilizaremos la fórmula

$$\int\frac{du}{u^2+a^2}=\frac{1}{a}\arctan\left(\frac{u}{a}\right)+C$$

Aplicando el cambio de variable

$$u^2=4x^2;\quad u=2x;\quad du=2dx$$

$$a^2=36;\qquad a=6$$

tenemos:

$$\int\frac{dx}{4x^2+36}=\frac{1}{2}\int\frac{2\,dx}{(2x)^2+6^2}$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{du}{u^2+a^2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{a}\arctan\frac{u}{a}+C$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}\arctan\frac{2x}{6}+C$$

$$=\frac{1}{12}\arctan\frac{x}{3}+C$$

10	Respuesta correcta: D

Para resolver esta integral usaremos la fórmula:

$$\int\frac{du}{u^2-a^2}=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right|+C$$

Aplicando el cambio de variable

$$u^2=4x^2;\quad u=2x;\quad du=2dx$$

$$a^2=36;\qquad a=6$$

tenemos

$$\int\frac{dx}{4x^2-36}=\frac{1}{2}\int\frac{2\,dx}{(2x)^2-6^2}$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{du}{u^2-a^2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right|+C$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2 \cdot 6} \ln \left| \frac{2x-6}{2x+6} \right| + C$$

$$= \frac{1}{24} \ln \left| \frac{x-3}{x+3} \right| + C$$

11 Respuesta correcta: C

En este caso usaremos la regla de integración:

$$\int u^n \, du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C \qquad (n \neq 1)$$

Aplicando el cambio de variable

$$u = x^2 + 1 \rightarrow du = 2x\, dx \rightarrow x\, dx = \frac{du}{2}$$

tenemos

$$\int x\sqrt{x^2+1}\; dx = \int (x^2+1)^{\frac{1}{2}} \cdot x\, dx$$

$$= \int u^{1/2} \cdot \frac{du}{2} = \frac{1}{2} \int u^{1/2}\, du = \frac{1}{2} \cdot \frac{u^{3/2}}{3/2} + C$$

$$= \frac{u^{\frac{3}{2}}}{3} + C = \frac{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}{3} + C$$

$$= \frac{1}{3}\sqrt{(x^2+1)^3} + C$$

12 Respuesta correcta: B

Aplicando el cambio de variable sugerido

$$u = \sqrt{x+4}$$

tenemos

$$u^2 = x + 4$$
$$x = u^2 - 4$$
$$dx = 2udu$$

Entonces,

$$\int x\sqrt{x+4}dx = \int \left(u^2-4\right)\left(u\right)\left(2udu\right)$$

Desarrollando obtenemos

$$\int \left(u^2-4\right)\left(u\right)\left(2udu\right) = 2\int \left(u^4 - 4u^2\right) du$$
$$= 2\int u^4 du - 8\int u^2 du$$
$$= 2\frac{u^5}{5} - 8\frac{u^3}{3} + C$$

Sustituimos $u=\sqrt{x+4}$:

$$=\frac{2}{5}\sqrt{(x+4)^5}-\frac{8}{3}\sqrt{(x+4)^3}+C$$

13 Respuesta correcta: C

Aplicamos el cambio de variable

$$u=\sqrt{x}$$

$$du=\frac{dx}{2\sqrt{x}}$$

$$2du=\frac{dx}{\sqrt{x}}$$

Realizando la sustitución en la integral tenemos:

$$\int\frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx=\int e^u\left(2du\right)$$

$$=2\int e^u du=2e^u+C$$

por lo tanto,

$$\int\frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx=2e^{\sqrt{x}}+C$$

14 Respuesta correcta: D

Para elegir un cambio de variable adecuado generalmente recurrimos a las expresiones que son argumentos de una función. En este caso, la exponencial e^x aparece como argumento de la función coseno. Esto sugiere el cambio de variable $u=e^x$.

Aplicando el cambio de variable

$$u=e^x\rightarrow du=e^x\,dx$$

tenemos

$$\int e^{4x}\cos(e^x)\,dx=\int e^{3x}\cos(e^x)\cdot(e^x\,dx)$$

$$=\int(e^x)^3\cos(e^x)\,(e^x\,dx)$$

$$= \int u^3 \cos u \; du$$

Esta integral se puede resolver usando el método de integración por partes. Entonces, el cambio de variable adecuado es:

$$u = e^x$$

15	Respuesta correcta: C

Este ejercicio se resuelve en dos etapas:
Primera etapa: Se propone el siguiente cambio de variable donde la idea fundamental es eliminar el radical:

$$u = x - 1$$

$$du = dx$$

Sustituimos

$$\int \frac{2dx}{\sqrt{x-1}-5} = 2\int \frac{du}{\sqrt{u}-5}$$

Segunda etapa: se propone un nuevo cambio de variable, de tal forma que

$$r = \sqrt{u}$$

$$dr = \frac{du}{2\sqrt{u}}$$

$$dr = \frac{du}{2r}$$

$$du = 2rdr$$

Sustituimos

$$2\int \frac{du}{\sqrt{u}-5} = 2\int \frac{2rdr}{r-5} = 4\int \frac{rdr}{r-5}$$

Resolvemos la última expresión:

$$4\int \frac{\left[r+(-5+5)\right]dr}{r-5} = 4\int dr + 20\int \frac{dr}{r-5}$$

$$4\int\frac{\left[r+\left(-5+5\right)\right]dr}{r-5}=4r+20\ln\left|r-5\right|+C$$

Donde: $r=\sqrt{u}$ y $u=x-1$

$$\int\frac{\left[r+\left(-5+5\right)\right]dr}{r-5}=4\sqrt{x-1}+20\ln\left|\sqrt{x-1}-5\right|+C$$

16	Respuesta correcta: A

Se propone el siguiente cambio de variable:

$$u=x^2+1$$

$$du=2xdx$$

$$xdx=\frac{du}{2}$$

Sustituimos $\int\frac{xdx}{\sqrt{x^2+1}-4}=\frac{1}{2}\int\frac{du}{\sqrt{u}-4}$

A continuación, se propone un nuevo cambio de variable:

$$r=\sqrt{u}$$

$$dr=\frac{du}{2\sqrt{u}}$$

$$dr=\frac{du}{2r}$$

$$du=2rdr$$

Sustituimos $\frac{1}{2}\int\frac{du}{\sqrt{u}-4}=\frac{1}{2}\int\frac{2rdr}{r-4}=\int\frac{rdr}{r-4}$

Resolvemos la última expresión:

$$\int\frac{\left[r+\left(-4+4\right)\right]dr}{r-4}=\int dr+4\int\frac{dr}{r-4}$$

$$\int\frac{\left[r+\left(-4+4\right)\right]dr}{r-4}=r+4\ln\left|r-4\right|+C$$

Donde $r=\sqrt{u}$ y $u=x^2+1$:

$$\int\frac{\left[r+\left(-4+4\right)\right]dr}{r-4}=\sqrt{x^2+1}+4\ln\left|\sqrt{x^2+1}-4\right|+C$$

17	Respuesta correcta: A

Para aplicar el método de integración por partes, primero elegimos u y dv

$$\int x\sqrt{x+1}dx$$

$$u = x \qquad \int dv = \int \sqrt{x+1}dx$$

$$du = dx \qquad \int dv = \int (x+1)^{1/2}\, dx$$

$$v = \frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}$$

Y sustituimos en la fórmula

$$\int u\, dv = u \cdot v - \int v\, du$$

$$\int x\sqrt{x+3}dx = \frac{2}{3}x(x+1)^{3/2} - \frac{2}{3}\int (x+1)^{3/2}\, dx$$

$$\int x\sqrt{x+3}dx = \frac{2}{3}x(x+1)^{3/2} - \frac{\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{5}{2}}}{\left(\frac{5}{2}\right)} + C$$

$$\int x\sqrt{x+3}dx = \frac{2}{3}x(x+1)^{3/2} - \frac{4(x+1)^{\frac{5}{2}}}{15} + C$$

$$\int x\sqrt{x+3}dx = \frac{2}{3}x\sqrt{(x+1)^3} - \frac{4}{15}\sqrt{(x+1)^5} + C$$

18	Respuesta correcta: A

Utilizamos el método tabular para realizar tres integraciones por partes sucesivas. De acuerdo con este, las operaciones deben realizarse en el sentido y orden que determinan las flechas. En este caso se tiene que:

Signo	u	dv
+	x^2	e^{-3x}
-	$2x$	$-\frac{e^{-3x}}{3}$
+	2	$\frac{e^{-3x}}{9}$
	0	$-\frac{e^{-3x}}{27}$

$$54\int x^2 e^{-3x}\, dx = 54\left[x^2\left(-\frac{e^{-3x}}{3}\right) - 2x \cdot \frac{e^{-3x}}{9} + 2\left(-\frac{e^{-3x}}{27}\right)\right] + C$$

$$= 54\left[-\frac{x^2e^{-3x}}{3} - \frac{2xe^{-3x}}{9} - \frac{2e^{-3x}}{27}\right] + C$$

$$= -18x^2e^{-3x} - 12xe^{-3x} - 4e^{-3x} + C$$

Cálculo integral: Respuestas correctas

19 Respuesta correcta: D

Para resolver este ejercicio, aplicamos propiedades de logaritmos en el integrando:

$$\int x^2 \ln x^2 \, dx = \int 2x^2 \ln x \, dx$$

A continuación para aplicar el método de integración por partes, elegimos u y dv

$$\int 2x^2 \ln x \, dx$$

$$u = \ln x \qquad dv = 2x^2 \, dx$$

$$du = \frac{dx}{x} \qquad v = \frac{2}{3}x^3$$

y sustituimos en la fórmula

$$\int u \, dv = u \cdot v - \int v \, du$$

$$\int \ln x \, (2x^2 \, dx) = \frac{2}{3}x^3 \cdot \ln x - \int \frac{2}{3}x^3 \cdot \frac{dx}{x}$$

$$= \frac{2}{3}x^3 \ln x - \frac{2}{3}\int x^2 dx$$

$$= \frac{2}{3}x^3 \ln x - \frac{2}{3} \cdot \frac{x^3}{3} + C$$

$$= \frac{2}{3}x^3 \ln x - \frac{2}{9}x^3 + C$$

20 Respuesta correcta: C

Utilizamos el método tabular para realizar tres integraciones por partes sucesivas. En este caso tenemos que:

Signo	u	dv
+	x^2	$\cos\left(\frac{x}{3}\right)$
-	$2x$	$3\,\text{sen}\left(\frac{x}{3}\right)$
+	2	$-9\cos\left(\frac{x}{3}\right)$
	0	$-27\text{sen}\left(\frac{x}{3}\right)$

$$\int x^2 \cos\frac{x}{3} \, dx = x^2 \cdot 3\,\text{sen}\frac{x}{3} - 2x\left(-9\cos\frac{x}{3}\right) + 2\left(-27\,\text{sen}\frac{x}{3}\right) + C$$

$$= 3x^2\,\text{sen}\frac{x}{3} + 18x\cos\frac{x}{3} - 54\,\text{sen}\frac{x}{3} + C$$

21	Respuesta correcta: D

- $\int \ln|x|\,dx$: se resuelve por partes.
- $\int x^3 \cos(3x)\,dx$: se resuelve por partes.
- $\int e^{3x} \cos(3x)\,dx$: se resuelve por partes.
- $\int \cos(e^x)e^x dx$: en este caso, usando el cambio de variable $u = e^x$ y $du = e^x dx$, la integral se reduce a:

$$\int \cos(u)\,du$$

Esta integral es inmediata y no es necesario aplicar el método de integración por partes, por lo tanto, la respuesta correcta es D

22	Respuesta correcta: B

Para determinar $f(x)$ calculamos la integral

$$f(x) = \int f'(x)\,dx = \int xe^x dx$$

Después, usando la técnica de integración por partes, elegimos u y dv:

$$\int xe^x dx$$

$$u = x \qquad \int dv = \int e^x dx$$

$$du = dx \qquad v = e^x$$

y sustituimos en la fórmula

$$\int u\,dv = u \cdot v - \int v\,du$$

$$f(x) = \int x\,e^x\,dx = xe^x - \int e^x dx$$

$$f(x) = xe^x - e^x + C$$

La gráfica de la función pasa por el punto (1,2), entonces:

$$f(1) = 2$$

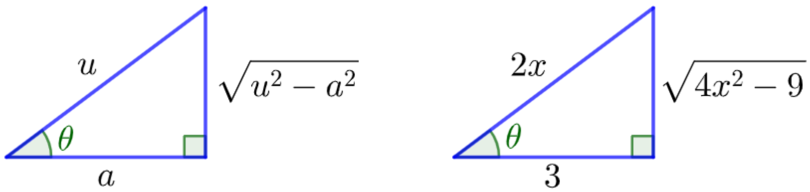
$$1 \cdot e^1 - e^1 + C = 2$$

$$e - e + C = 2$$

$$C = 2$$

23 Respuesta correcta: D

La sustitución trigonométrica se muestra en la figura:



$$u = 2x \qquad a = 3$$

$$u^2 = 4x^2 \qquad a^2 = 9$$

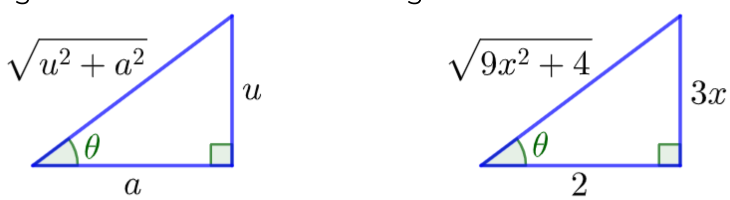
$$\sec\theta = \frac{u}{a} = \frac{2x}{3} \rightarrow x = \frac{3}{2}\sec\theta$$

Por lo tanto, el cambio de variable es:

$$x = \frac{3}{2}\sec\theta$$

24 Respuesta correcta: A

El caso de la sustitución trigonométrica se indica en la figura:



$$u = 3x \qquad a = 2$$

$$u^2 = 9x^2 \qquad a^2 = 4$$

$$\tan\theta = \frac{3x}{2} \rightarrow x = \frac{2}{3}\tan\theta$$

$$dx = \frac{2}{3}\sec^2\theta\, d\theta$$

$$\sec\theta = \frac{\sqrt{9x^2+4}}{2} \rightarrow \sqrt{9x^2+4} = 2\sec\theta$$

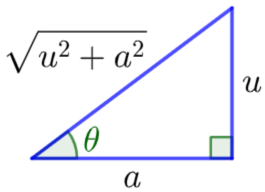
Sustituyendo en la integral y simplificando tenemos:

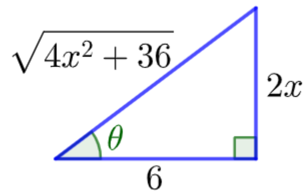
$$\int \frac{dx}{x\sqrt{9x^2+4}} = \int \frac{\frac{2}{3}\sec^2\theta\, d\theta}{\frac{2}{3}\tan\theta \cdot 2\sec\theta}$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{\sec\theta}{\tan\theta} d\theta = \frac{1}{2}\int \csc\theta\, d\theta$$

25	Respuesta correcta: B

Identificamos el caso de la sustitución trigonométrica que se muestra en la figura:





$$u = 2x \qquad a = 6$$

$$u^2 = 4x^2 \qquad a^2 = 36$$

$$\tan\theta = \frac{2x}{6} = \frac{x}{3}$$

$$x = 3\tan\theta$$

$$dx = 3\sec^2\theta\, d\theta$$

$$\sec\theta = \frac{\sqrt{4x^2+36}}{6}$$

$$\sqrt{4x^2+36} = 6\sec\theta$$

Sustituyendo en la integral y simplificando tenemos:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2+36}} = \int \frac{3\sec^2\theta\, d\theta}{6\sec\theta}$$

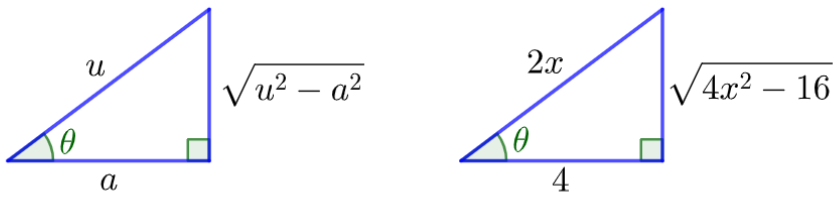
$$= \frac{1}{2}\int \sec\theta\, d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\ln|\sec\theta + \tan\theta| + C$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{4x^2+36}}{6} + \frac{x}{3}\right| + C$$

26 Respuesta correcta: B

El caso de la sustitución trigonométrica se indica en la figura:



$$u^2 = 4x^2 \qquad a^2 = 16$$

$$u = 2x \qquad a = 4$$

$$\sec\theta = \frac{u}{a} = \frac{2x}{4}$$

$$\sec\theta = \frac{x}{2}$$

$$x = 2\sec\theta$$

Por lo tanto, el cambio de variable es:

$$x = 2\sec\theta$$

27 Respuesta correcta: C

Continúa del 26.

Aplicamos el cambio de variable:

$$x = 2\sec\theta$$

$$dx = 2\sec\theta\tan\theta\, d\theta$$

$$\sqrt{4x^2 - 16} = 4\tan\theta$$

Sustituyendo en la integral y simplificando obtenemos:

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4x^2 - 16}} = \int \frac{2\sec\theta\tan\theta\, d\theta}{(2\sec\theta)^2 \cdot 4\tan\theta}$$

$$= \int \frac{2\sec\theta\tan\theta\, d\theta}{16\sec^2\theta\tan\theta}$$

$$= \frac{1}{8}\int \frac{d\theta}{\sec\theta}$$

28	Respuesta correcta: C

Continúa del 27.

Calculando la integral tenemos que:

$$\int \frac{d\theta}{\sec\theta} = \int \cos\theta \, d\theta$$

$$= \operatorname{sen}\theta + C$$

$$= \frac{\sqrt{u^2 - a^2}}{u} + C$$

$$= \frac{\sqrt{4x^2 - 16}}{2x} + C$$

29	Respuesta correcta: A

Factorizamos el denominador del integrando:

$$\int \frac{dx}{4x^2 + 16x} = \frac{1}{4}\int \frac{dx}{x^2 + 4x} = \frac{1}{4}\int \frac{dx}{x(x+4)}$$

A continuación, se propone una descomposición en fracciones parciales de la fracción

$$\frac{1}{x(x+4)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+4}$$

Entonces,

$$1 = A(x+4) + Bx$$

Para obtener los coeficientes A y B realizamos las sustituciones:

- Si $x = 0$, obtenemos $1 = 4A$. Entonces $A = \frac{1}{4}$
- Si $x = -4$, obtenemos $1 = -4B$. Entonces $B = -\frac{1}{4}$

Sustituimos los valores obtenidos para los coeficientes

$$\frac{1}{4}\int \frac{dx}{x(x+4)} = \frac{1}{4}\left[\int \frac{Adx}{x} + \int \frac{Bdx}{x+4}\right] + C$$

$$\frac{1}{4}\int \frac{dx}{x(x+4)} = \frac{1}{4}\left[\frac{1}{4}\int \frac{dx}{x} - \frac{1}{4}\int \frac{Bdx}{x+4}\right] + C$$

Resolvemos ambas integrales:

$$\frac{1}{4}\int \frac{dx}{x(x+4)} = \frac{1}{16}\ln|x| - \frac{1}{16}\ln|x+4| + C$$

$$\frac{1}{4}\int \frac{dx}{x(x+4)} = \frac{1}{16}\ln\left|\frac{x}{x+4}\right| + C$$

30	Respuesta correcta: A

Factorizamos el denominador del integrando:

$$\int \frac{dx}{x\left(x^2-1\right)} = \int \frac{dx}{x\left(x-1\right)\left(x+1\right)}$$

Todos los factores son lineales y distintos, por lo tanto, la descomposición en fracciones parciales tiene la forma

$$\int \frac{dx}{\left(x-a_1\right)\left(x-a_2\right)\cdots\left(x-a_n\right)} = \int \frac{A_1dx}{x-a_1} + \int \frac{A_2dx}{x-a_2} + \cdots + \int \frac{A_ndx}{x-a_n}$$

En este caso:

$$\frac{1}{x\left(x-1\right)\left(x+1\right)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+1}$$

$$1 = A\left(x^2-1\right) + Bx\left(x+1\right) + Cx\left(x-1\right)$$

Para obtener los coeficientes realizamos las sustituciones:

- Si $x=0$, tenemos que $1=-A$. Entonces $A=-1$
- Si $x=1$, tenemos que $1=2B$. Entonces $B=\frac{1}{2}$
- Si $x=-1$, tenemos que $1=2C$. Entonces $C=\frac{1}{2}$

Sustituimos los valores obtenidos para los coeficientes

$$\int \frac{dx}{x\left(x-1\right)\left(x+1\right)} = \int \frac{Adx}{x} + \int \frac{Bdx}{x-1} + \int \frac{Cdx}{x+1}$$

$$\int \frac{dx}{x\left(x-1\right)\left(x+1\right)} = -\int \frac{dx}{x} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x-1} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x+1}$$

Finalmente, calculamos las integrales

$$\int \frac{dx}{x\left(x-1\right)\left(x+1\right)} = -\ln\left|x\right| + \frac{1}{2}\ln\left|x-1\right| + \frac{1}{2}\ln\left|x+1\right| + C$$

$$\int \frac{dx}{x\left(x-1\right)\left(x+1\right)} = -\ln\left|x\right| + \frac{1}{2}\ln\left|\left(x-1\right)\left(x+1\right)\right| + C$$

$$\int \frac{dx}{x\left(x-1\right)\left(x+1\right)} = -\ln\left|x\right| + \frac{1}{2}\ln\left|x^2-1\right| + C$$

31	Respuesta correcta: B

La integral contiene dos términos lineales distintos y un término cuadrático duplicado de la siguiente manera:

$$\int \frac{dx}{\left(x^2-4\right)\left(x^2+9\right)^2} = \int \frac{dx}{(x-2)(x+2)\left(x^2+9\right)^2}$$

Se propone una descomposición que debe incluir una fracción para cada factor lineal. Estas fracciones llevan una constante en el numerador.

En el caso del factor cuadrático repetido, el exponente es 2, entonces debemos incluir dos fracciones: una con exponente 1 y otra con exponente 2. Estas fracciones llevan un polinomio lineal en el numerador.

La descomposición tiene la forma:

$$= \int \frac{Adx}{x-2} + \int \frac{Bdx}{x+2} + \int \frac{(Cx+D)\,dx}{x^2+9} + \int \frac{(Ex+F)\,dx}{\left(x^2+9\right)^2}$$

32	Respuesta correcta: A

La descomposición tiene la forma:

$$\frac{1}{x^2\left(x^2+3\right)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx+D}{x^2+3}$$

Entonces,

$$1 = Ax\left(x^2+3\right) + B\left(x^2+3\right) + (Cx+D)x^2$$

Desarrollamos las operaciones y simplificamos:

$$1 = Ax^3 + 3Ax + Bx^2 + 3B + Cx^3 + Dx^2$$

$$1 = (A+C)x^3 + (B+D)x^2 + 3Ax + 3B$$

Finalmente, igualando exponentes, obtenemos el sistema de ecuaciones:

$$A+C=0$$

$$B+D=0$$

$$3A=0$$

$$3B=1$$

33	**Respuesta correcta: A**

La fracción contiene solo polinomios lineales que se puede descomponer de la siguiente manera:

$$\int \frac{dx}{x(x-1)(x+5)} = \int \frac{Adx}{x} + \int \frac{Bdx}{x-1} \int \frac{Cdx}{x+5}$$

Resolvemos la fracción parcial:

$$\frac{1}{x(x-1)(x+5)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+5}$$

$$1 = A(x-1)(x+5) + Bx(x+5) + Cx(x-1)$$

Para obtener los coeficientes realizamos las sustituciones:

- Si $x = 0$, tenemos $1 = -5A$, por lo tanto, $A = -\frac{1}{5}$.
- Si $x = 1$, tenemos $1 = 6B$, por lo tanto, $B = \frac{1}{6}$
- Si $x = -5$, tenemos $1 = 30C$, por lo tanto, $C = \frac{1}{30}$

Sustituimos los valores obtenidos para los coeficientes y calculamos las integrales:

$$\int \frac{dx}{x(x-1)(x+5)} = -\frac{1}{5}\int \frac{dx}{x} + \frac{1}{6}\int \frac{dx}{x-1} + \frac{1}{30}\int \frac{Cdx}{x+5}$$

$$\int \frac{dx}{x(x-1)(x+5)} = -\frac{1}{5}\ln x + \frac{1}{6}\ln|x-1| + \frac{1}{30}\ln|x+5| + C$$

$$\int \frac{dx}{x(x-1)(x+5)} = -\frac{6}{30}\ln x + \frac{5}{30}\ln|x-1| + \frac{1}{30}\ln|x+5| + C$$

$$\int \frac{dx}{x(x-1)(x+5)} = \frac{1}{30}\left(\ln\left|\frac{(x+5)(x-1)^5}{x^6}\right|\right) + C$$

Cálculo integral: Respuestas correctas

34 Respuesta correcta: C

En este ejercicio tenemos:

$$\int \frac{dx}{x^2(x+1)(x^2+1)} = \int \frac{\quad dx}{x} + \int \frac{Bdx}{x^2} + \int \frac{Cdx}{x+1} + \int \frac{\quad dx}{x^2+1}$$

El primer factor es lineal, entonces su numerador es una constante: $\int \frac{Adx}{x}$

El último factor es cuadrático, entonces su numerador es un polinomio lineal: $\int \frac{(Dx+E)dx}{x^2+1}$

35 Respuesta correcta: C

Por el Teorema Fundamental del Cálculo la integral definida se puede calcular mediante la regla:

$$\int_a^b f(x)dx = F(a) - F(b)$$

donde $F(x)$ es una antiderivada de $f(x)$.

Para obtener la antiderivada aplicamos el cambio de variable

$$u = x^2 - 2 \Rightarrow du = 2x\, dx \Rightarrow x\, dx = \frac{du}{2}$$

Tenemos:

$$x = 2 \Rightarrow u = 2^2 - 2 = 2$$
$$x = 3 \Rightarrow u = 3^2 - 2 = 7$$

Sustituyendo en la integral obtenemos:

$$\int_2^3 \frac{x\, dx}{x^2-2} = \frac{1}{2}\int_2^7 \frac{du}{u}$$
$$= \frac{1}{2}\ln u\Big|_2^7$$
$$= \frac{1}{2}[\ln 7 - \ln 2]$$
$$= \frac{1}{2}\ln\frac{7}{2}$$

36 Respuesta correcta: D

Aplicando el cambio de variable

$$u = \operatorname{sen} x \Rightarrow du = \cos x\, dx$$

Tenemos:

$$x = -\pi \Rightarrow u = \operatorname{sen}(-\pi) = 0$$
$$x = \pi \Rightarrow u = \sin\pi = 0$$

Sustituimos en la integral:

$$\int_{-\pi}^{\pi} 5\operatorname{sen}^2 x\cos x\, dx = 5\int_0^0 u^2 du$$

Los límites de integración son iguales, entonces el valor de la integral es cero:

$$\int_{-\pi}^{\pi} 5\operatorname{sen}^2 x\cos x\, dx = 5\cdot 0 = 0$$

37 **Respuesta correcta: D**

Calculamos la integral:

$$\int_0^a x\,dx = \frac{1}{2}x^2\Big|_0^a$$

$$= \frac{1}{2}[a^2 - 0^2]$$

$$= \frac{a^2}{2}$$

38 **Respuesta correcta: C**

Calculamos los valores de las integrales:

1. $\int_0^1 9x^2 dx = 9 \cdot \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = 9\left[\frac{1}{3} - \frac{0}{3}\right] = 9 \cdot \frac{1}{3} = 3$

2. $\int_1^e \frac{dx}{x} = \ln x|_1^e = \ln e - \ln 1 = 1 - 0 = 1$

3. $\int_1^2 \frac{4\,dx}{x^2} = -\frac{4}{x}\Big|_1^2 = \left(-\frac{4}{2}\right) - \left(-\frac{4}{1}\right) = -2 + 4 = 2$

4. $\int_0^1 16x^3 dx = 16 \cdot \frac{x^4}{4}\Big|_0^1 = 16\left[\frac{1}{4} - \frac{0}{4}\right] = 16 \cdot \frac{1}{4} = 4$

Por lo tanto, el orden de menor a mayor queda de la siguiente manera:

2, 3, 1, 4

39	Respuesta correcta: A

El área bajo la curva de una función $f(x)$ en un intervalo $[a,b]$ se obtiene calculando la integral definida:

$$S=\int_a^b |f(x)|\,dx$$

La función $f(x)=-x^3$ es positiva en el intervalo $[-a,0]$ y es negativa en el intervalo $[0,a]$. Entonces el área S se calcula:

$$S=\int_{-a}^{a}|-x^3|\,dx=\int_{-a}^{0}-x^3\,dx+\int_0^a x^3dx$$

$$=\left[-\frac{x^4}{4}\right]_{-a}^{0}+\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^a$$

$$=\left[\left(-\frac{0}{4}\right)-\left(-\frac{a^4}{4}\right)\right]+\left[\frac{a^4}{4}-\frac{0}{4}\right]$$

$$=\frac{a^4}{4}+\frac{a^4}{4}$$

$$=\frac{a^4}{2}$$

40 **Respuesta correcta: C**

La longitud de arco de la curva $y = f(x)$ en el intervalo $[a, b]$ se calcula mediante la fórmula

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx$$

En este caso,

$$y^2 = x^3$$
$$y = x^{3/2}$$
$$f(x) = x^{3/2}$$

Entonces,

$$f'(x) = \frac{3}{2}x^{1/2}$$

Y, sustituyendo en la fórmula, se obtiene:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx$$

$$= \int_0^{5/9} \sqrt{1 + \left(\frac{3}{2}x^{1/2}\right)^2}\, dx$$

$$= \int_0^{5/9} \sqrt{1 + \frac{9x}{4}}\, dx$$

$$= \frac{4}{9}\int_0^{5/9} \left(1 + \frac{9x}{4}\right)^{1/2} \left(\frac{9}{4}dx\right)$$

$$= \frac{4}{9} \cdot \frac{2}{3}\left(1 + \frac{9x}{4}\right)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^{5/9}$$

$$= \frac{8}{27}\left[\left(1 + \frac{9 \cdot \frac{5}{9}}{4}\right)^{\frac{3}{2}} - \left(1 + \frac{9 \cdot 0}{4}\right)^{\frac{3}{2}}\right]$$

$$= \frac{8}{27}\left[\left(\frac{9}{4}\right)^{\frac{3}{2}} - 1\right]$$

$$= \frac{8}{27}\left[\frac{27}{8} - 1\right]$$

$$= 1 - \frac{8}{27}$$

$$= \frac{19}{27}$$