UNIDAD DE APRENDIZAJE DE PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA

COMPETENCIA GENERAL
Resuelve problemas referentes a estadística descriptiva y probabilidad en su entorno académico, social y global.

COMPETENCIA PARTICULAR
Emplea la estadística descriptiva en la solución de problemas que se presentan en su ámbito académico, social y global.

UNIDAD 1: ESTADÍSTICA DESCRIPTIVA.

¿Para qué sirve la Probabilidad y la Estadística?

La probabilidad y la estadística son parte importante de la vida. A cada momento elaboramos juicios y tomamos decisiones y, consciente o inconscientemente, utilizamos sus conceptos y técnicas; por ejemplo, decidimos a que hora salir de casa, basados en el tiempo promedio necesario para trasladarnos al lugar que deseamos; escogemos el medio de trasporte en función de su disponibilidad, su costo y rapidez relativa a nuestra prisa, analizamos y decidimos respecto a cualquier proyecto considerando sus probabilidades de éxito en diferentes condiciones; la experiencia es una forma de estudiar la tendencia de los fenómenos y decidir en consecuencia: "llevaré paraguas"; "compraré otro cuaderno"; "no le prestaré mi calculadora"; etc.

A pesar de que los conceptos básicos de la probabilidad y la estadística son conocidos en general por el hombre moderno, es necesario el estudio sistemático de ellos a fin de disponer de las técnicas adecuadas para resolver con mayor precisión los problemas de la vida actual. Por ejemplo, ¿cuál es la probabilidad de éxito de este proyecto?; ¿qué tan seguro puedo estar de la calidad de cierto artículo, si al tomar 100 de ellos 8 eran defectuosos?; ¿cuál es el volumen esperado de ventas para mi empresa durante los próximos 18 meses, a fin de elaborar el programa de producción?; ¿qué relación existe entre el presupuesto de publicidad y el número de clientes de mi empresa?; ¿cuál es el lugar más conveniente para vacacionar si existen opiniones encontradas respecto al mejor lugar, pero es posible clasificar las preferencias de los integrantes de un grupo de vacacionistas?; ¿qué resistencia debe tener un perno de metal para soportar la carga a la que será sometido?; etc.

Las respuestas a estas preguntas se obtienen por medio de técnicas cuyo estudio se inicia en este curso y se extiende hasta cursos avanzados y tesis post-doctorales.

La estadística es el lenguaje universal de la ciencia. Como usuarios potenciales de la estadística, necesitamos dominar la "ciencia" y el "arte" de utilizar correctamente su metodología. El empleo cuidadoso de los métodos estadísticos permite obtener información precisa de los datos, que incluyen:

1) Definir cuidadosamente la situación.
2) Recolectar datos.
3) Resumir con precisión los datos.
4) Obtener y comunicar las conclusiones significativas.

La estadística implica información, números para resumir esta información y su interpretación. El término estadístico posee varios significados para personas de diversos entornos e intereses. Para algunos; es un campo de "magia" en el que una persona con conocimientos supera a los demás. Para otros, se trata de un medio para recolectar y representar grandes cantidades de información. Y todavía para otro grupo, se trata de un medio para "tomar decisiones de frente a la incertidumbre". Entre otros.

Para su estudio se divide en dos grandes áreas: Estadística Descriptiva y Estadística Inferencial.

La Probabilidad y la Estadística están llenas de números, pero también es verdad que no se requiere conocimientos avanzados de Matemáticas para iniciarse en su estudio.

Es importante, manejar fracciones, determinar porcentajes, operaciones básicas de aritmética y, razones y proporciones.

∆ Conceptos Básicos.

Estadística Descriptiva. Es la rama de la Estadística que incluye la recolección, presentación y descripción de los datos maestrales.

Estadística Inferencial. Se refiere a la técnica de interpretación de los valores resultantes de las técnicas descriptivas y a la toma de decisiones y obtención de conclusiones sobre la población muestreada.

Población. Es la colección o conjunto de individuos, objetos o eventos cuyas propiedades serán analizadas.

Muestra. Es un subconjunto de la población.

Parámetro. Es un valor que describe a toda la población, pe., la edad promedio al momento de la admisión de todos los estudiantes que hayan asistido a la "Wilfredo Massieu".

Dato. Valor de la variable asociado a un elemento de una población o una muestra, pe., Pedro Salas ingreso a la vocacional a los 15 años de edad.

Experimento. Actividad realizada según un plan definido cuyos resultados producen un conjunto de datos.

Variable. Característica de interés a cerca de cada elemento de una población o una muestra, pe., son variables las edades, el color de sus cabellos u ojos de los estudiantes, su estatura, su peso, etc.

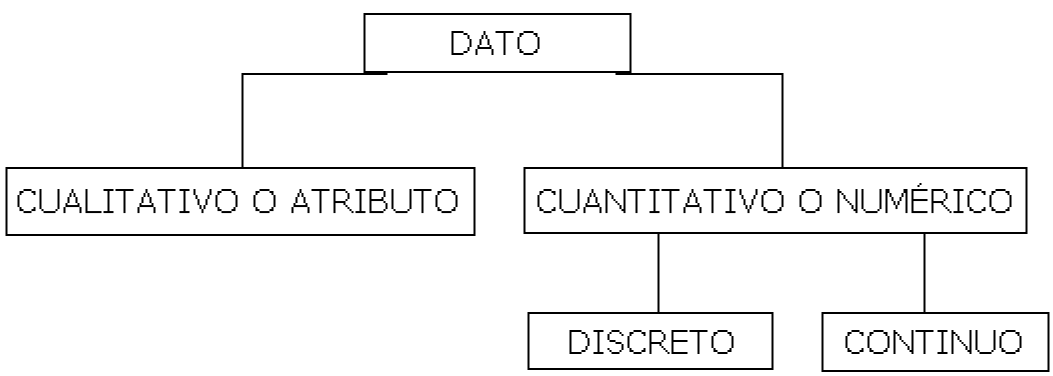
Valor Estadístico. Es la característica numérica de una muestra, pe., la estatura promedio calculada a partir de un conjunto de 50 medidas de estatura.

Dato Cualitativo o Atributo. Es el resultado de un proceso que caracteriza o describe un elemento de una población.

Dato Cuantitativo o Numérico. Es el resultado de un proceso que cuantifica, es decir, que cuenta o mide (longitud, peso, etc.)

Variable Discreta. Valores específicos que puede tomar una variable asociada a un número entero.

Variable Continua. Valores que puede tomar la variable en un intervalo dado.



Medibilidad y Variabilidad. Siempre se espera que ocurra variabilidad en un conjunto de datos experimentales. Si aparece muy poca o ninguna variación, se conjetura que el instrumento de medición no es suficientemente preciso. No importa de qué variable se trate, siempre existirá variabilidad en la respuesta numérica si el instrumento de medición es suficientemente preciso.

Por ejemplo. En una caja con 24 barras de chocolate, anote el peso de cada una. Se observa que cada barra pesa 30 gr., redondeado a enteros. ¿Significa esto que las barras tienen un peso idéntico? Realmente no, si se pesa en una balanza analítica que mide miligramos, los pesos de las barras de chocolate presentarán variabilidad.

Los cuatro conceptos indispensables en la descripción de conjuntos de datos univariados, son:

1) Tipos de Distribución.
2) Medidas de Tendencia Central.
3) Medidas de Dispersión o Variabilidad.
4) Medidas de Posición.

RAP 1: Organizar los datos obtenidos de una muestra o población en forma tabular y gráfica.

1) Tipos de Distribución.

Presentación Tallo-Hoja. Es una técnica para compendiar datos numéricos, y consiste en combinar dos procedimientos; uno gráfico y el otro de ordenación. El tallo se forma con el o los primeros dígitos del dato, mientras que la hoja se forma con los demás dígitos.

Sin embargo, una simple lista de un conjunto de datos, no le dice gran cosa al lector. Algunas veces se desea condensar los datos en una forma más manejable. Esto puede lograrse con la ayuda de una distribución de frecuencias.

Frecuencia (f). Es el número de veces que ocurre el valor **x** en la muestra.

Existen distribuciones de frecuencias agrupadas y los no agrupadas, no agrupada significa que los valores de **x** no se combinan para formar grupos, sino que cada **x** es un grupo en sí.

La suma de las frecuencias debe ser exactamente igual al número de datos. $\mathbf{n = \sum f}$.

Histograma. Es una gráfica de barras, que representa a un conjunto de datos, la cual esta compuesta por un titulo, que identifica la población de interés, una escala vertical que identifica las frecuencias en las distintas clases y, una escala horizontal que identifica a la variable **x** (indicando las fronteras, límites o marca de clase).

Polígono de Frecuencia. Es la unión de las marcas de clase, de la misma gráfica del histograma.

Ojiva. Una distribución de frecuencias puede convertirse fácilmente en una distribución de frecuencias acumuladas, reemplazando las frecuencias simples con las frecuencias acumuladas, que es la suma de frecuencias de esa clase y la suma de frecuencias de todas las clases precedentes. Toda ojiva comienza con una frecuencia relativa igual a cero, asociada a la frontera inferior de la primera clase y termina con una frecuencia relativa del 100% asociada a la frontera superior de la última clase.

Marca de Clase (X). Llamada algunas veces punto medio de clase, puesto que es el valor numérico situado exactamente en la parte central de cada clase.

Ancho de Clase (c). Es la diferencia entre un límite inferior de clase y el límite inferior de la siguiente clase.

La frontera de clase, son números que no están presentes en los datos muestrales, sino que se localizan en medio del límite superior de una clase y el límite inferior de la clase siguiente.

Procedimiento.

1) Identifique el puntaje máximo y mínimo y obtenga la amplitud **A=H-L;** en donde, **H** es el valor máximo y L el valor mínimo.

2) Seleccione un número de clase **(m=10)** y un ancho de clase **(f=?)** de manera que el producto **($mc=A_t$); A_t** amplitud teórica, la cual debe ser un poco mayor que la amplitud real **(A).**

3) Elija un valor inicial, este valor debe ser un poco más pequeño que el puntaje mínimo.

Nota. El límite inferior de clase, es el valor más pequeño que puede asignarse a cada clase. Los límites superiores de clase son los valores de mayor magnitud que puede asignarse a cada clase.

Ejemplo.

Ordena los datos seleccionados de los pesos (en lbs.) de cincuenta estudiantes, para diez clases. Trazando las graficas correspondientes.

98	150	108	158	162	112	118	167	170	120
177	186	191	128	135	195	137	205	190	120
188	176	118	168	115	115	162	157	154	148
101	143	145	108	155	110	154	116	161	165
145	184	120	170	195	132	129	215	176	183

0	9	8						
1	0	8	1	8				
1	1	2	8	8	5	5	0	6
1	2	0	8	0	0	9		
1	3	5	7	2				
1	4	8	3	5	5			
1	5	0	8	7	4	5	4	
1	6	2	7	8	2	1	5	
1	7	0	7	6	0	6		
1	8	6	8	4	3			
1	9	1	5	0	5			
2	0	5						
2	1	5						

H=215 L=98 A=H-L A=215-98 A=117

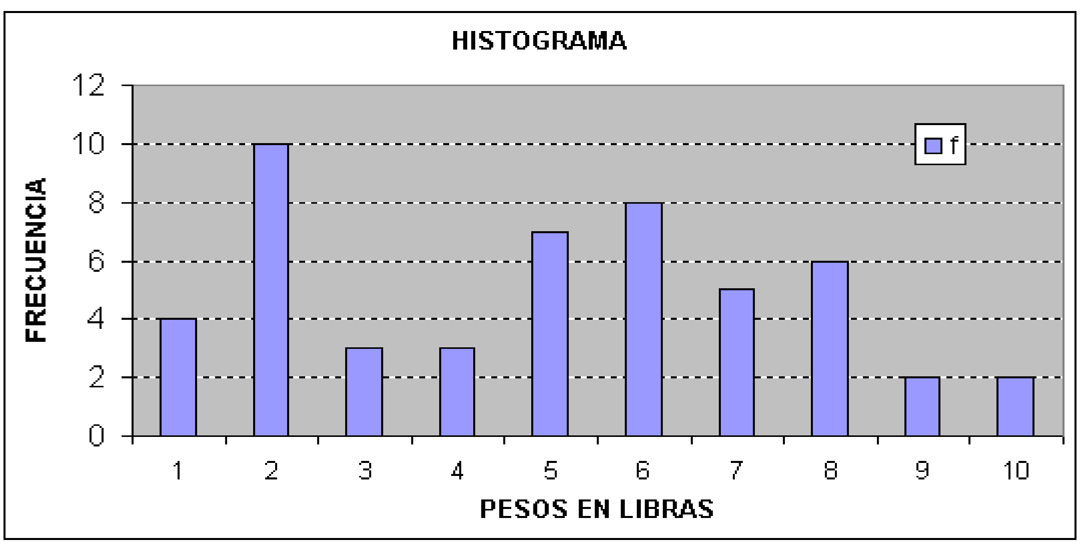
si m=10 entonces, c=12.

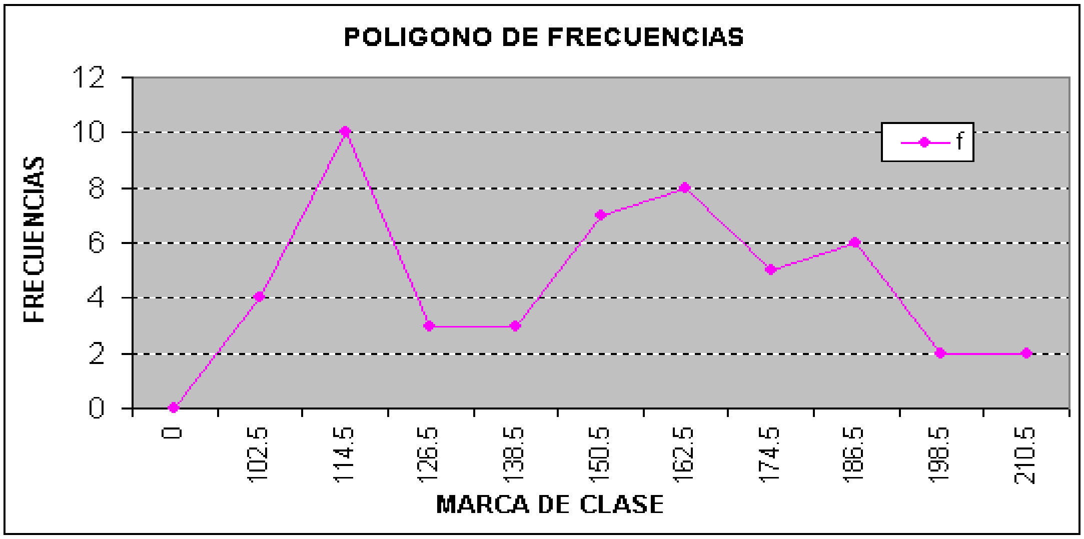
A_t=(10)*(12)=120

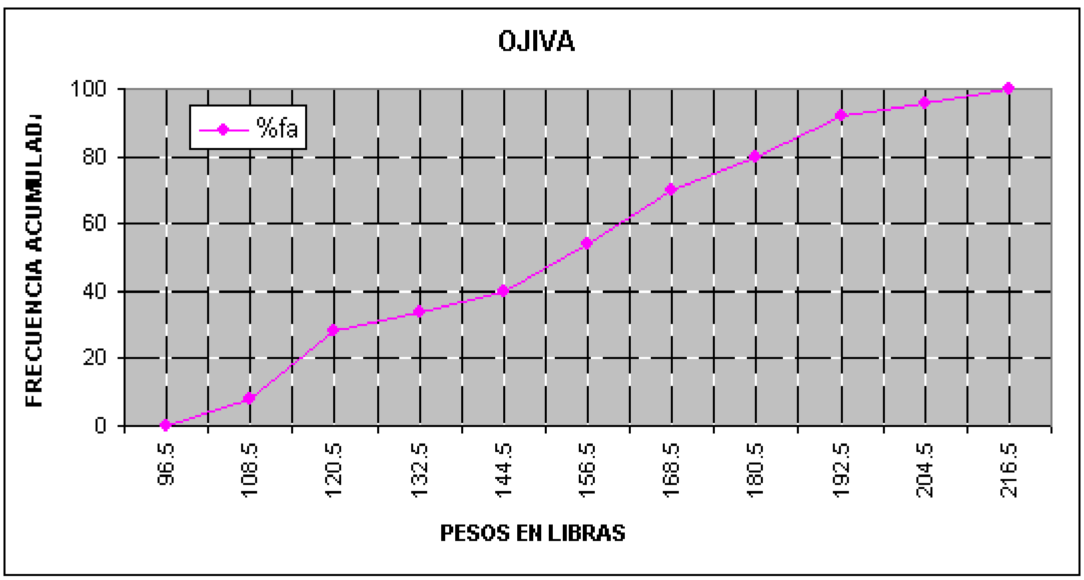
d=A_t-A; d=120-117=3; por lo tanto se le quita 2 a L y se le agrega 1 a H.

L=98-2=96+1=97. y H=215+1=216.

m	c		f	fa	%fa	x
1	97	108	4	4	8	102.5
2	109	120	10	14	28	114.5
3	121	132	3	17	34	126.5
4	133	144	3	20	40	138.5
5	145	156	7	27	54	150.5
6	157	168	8	35	70	162.5
7	169	180	5	40	80	174.5
8	181	192	6	46	92	186.5
9	193	204	2	48	96	198.5
10	205	216	2	50	100	210.5
		Σ	50			







Ejercicio.

Hoy en día muchos estudiantes laboran durante 6 hrs., en diferentes tipos de trabajo. Se tomó una muestra de 30 jóvenes y se les preguntó el salario que perciben a la quincena, los datos son:

510	850	860	1050	1070	1090	1110	1150	1350	1450
1500	1560	1680	1710	1760	1810	1860	1970	2010	2020
2100	2240	2370	2390	2460	2610	2740	3470	3920	4190

Si se tiene un ancho de clase de 737, ¿cómo serán las distribuciones de frecuencia?

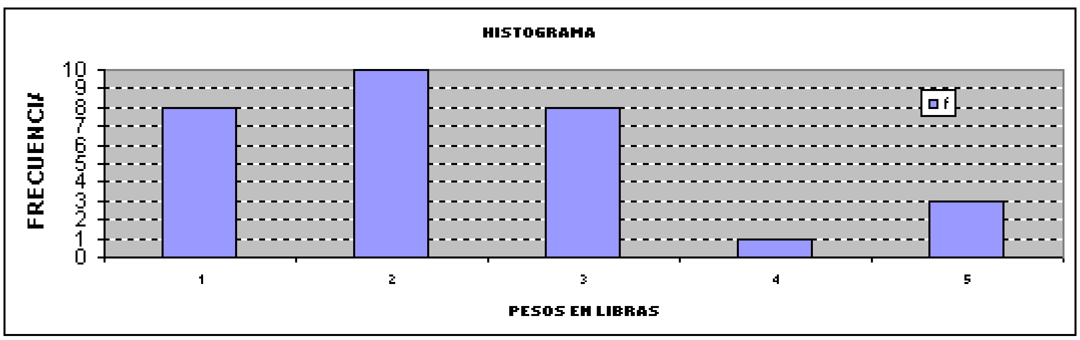
Sol. 1

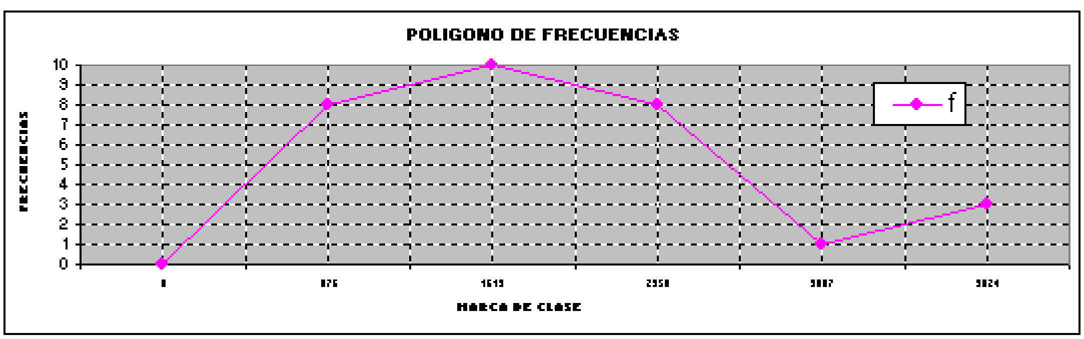
0	510	850	860													
1	050	070	090	110	150	350	450	500	560	680	710	760	810	860	970	
2	010	020	100	240	370	390	460	610	740							
3	470	920														
4	190															

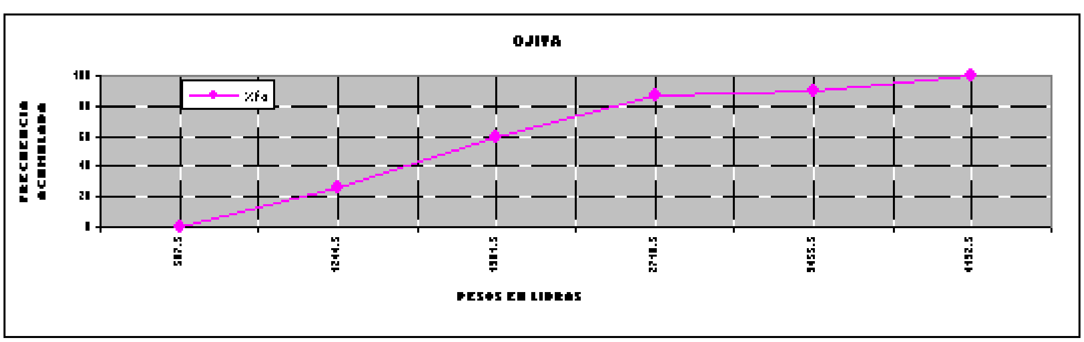
H=4190; L=510; A=H-L; A=4190-510; A=3680, si c=737, entonces m=5, At=(737)*(5)=3685; d=At-A;

d=6385-3680; d=5; por lo tanto se le resta 3 a L y 2 a H. L=510-3; L=507+1=508; H=4190+2; H=4192.

m	c		f	fa	%fa	x
1	508	1244	8	8	27	876
2	1245	1981	10	18	60	1613
3	1982	2718	8	26	87	2350
4	2719	3455	1	27	90	3087
5	3456	4192	3	30	100	3824







RAP 2: Calcular e interpretar las medidas de tendencia central y de dispersión, de datos obtenidos de una muestra o de población, para resolver problemas de diversas áreas del conocimiento.

2) Medidas de Tendencia Central. Son valores numéricos que tienden a localizar, en algún sentido, la parte central de un conjunto de datos. Generalmente, el término promedio se asocia a estas mediciones. Cada una de las diferentes medidas de tendencia central puede recibir el nombre de valor promedio.

Media ($\bar{x}$). Es el promedio con el que probablemente se está más familiarizado, se suman todos los valores de la variable **x** y se dividen entre **n** el número de esos valores

$\bar{x}$ **= ∑x/n Individual ;** $\bar{x}$ **=∑xf/∑f Grupal.**

Mediana (M). Es el valor ocupado por la posición central cuando los datos se ordenan de acuerdo con su magnitud. Ejemplo.

3, 3, 5, 6 y 8 ; posición de la Mediana. pM=(n+1)/2 ;

pM=(5+1)/2 ; pM=3 ; M=5.

Nota. La mediana será exactamente el valor central del conjunto de datos cuando **"n"** sea un número impar. Pero, cuando **"n"** es par, la posición de la mediana será siempre la mitad de algún número.

pM=(6+1)/2 ; pM=3.5 ; pM=(5+1)/2 ; pM=3.

Moda. Es el valor de **x** que ocurre con mayor frecuencia. Ejemplo.

3, 3, 5, 6 y 8; la moda es 3. Si sucede que dos o más valores tienen la misma frecuencia más alta, se dice que no existe la moda.

Centro de Amplitud (CA). Un conjunto de datos siempre tienen un extremo inferior **L** y otro superior **H**. el punto medio o centro de la amplitud es el número situado entre ellos, exactamente en la parte central. Ejemplo.

6, 7, 8, 9 y 10 ; CA=(L+H)/2 ; CA=(6+10)/2 ; CA=8.

Ejemplo.

Calcular las medidas de tendencia central del primer ejemplo (el de los pesos en libras de los 50 estudiantes).

m	x	f	xf
1	102.5	4	410
2	114.5	10	1145
3	126.5	3	379.5
4	138.5	3	415.5
5	150.5	7	1053.5
6	162.5	8	1300
7	174.5	5	872.5
8	186.5	6	1119
9	198.5	2	397
10	210.5	2	421
		$\sum$	7513

a) x=7513/50;   **x**=150.260

b) pμ=(50+1)/2;   **pμ**=25.5

25=154

μ=154

26=154

c) $\mathbf{M_o}$ =120

d) CA=(215+98)/2;   **CA**=156.5

Ejercicios.

1) Determinar las medidas de tendencia central del primer ejercicio (la de los salarios de los 30 estudiantes). **a) x=1883.233, b) μ=1785, c)** $\mathbf{M_o}$**=no existe y, d) CA=2350.**

2) En una muestra de 40 empleados, se obtuvieron las siguientes estaturas en mts.

1.46	1.59	1.67	1.76	1.53	1.62	1.68	1.90
1.58	1.66	1.74	1.52	1.62	1.68	1.84	1.58
1.66	1.73	1.52	1.61	1.68	1.81	1.56	1.66
1.72	1.50	1.60	1.68	1.80	1.55	1.64	1.72
1.50	1.60	1.67	1.77	1.55	1.62	1.70	1.67

Si en la cuarta clase los límites son 1.69 y 1.76, ¿cómo serán las distribuciones de frecuencia y las medidas de tendencia central? **m=6, x=1.641, b) μ=1.660, c)** $\mathbf{M_o}$**=1.680 y, d) CA=1.680.**

Sol 2.

1)

m	x	f	xf
1	876	8	7008
2	1613	10	16130
3	2350	8	18800
4	3087	1	3087
5	3824	3	11472
		$\sum$	56497

a) x=56497/30; **x**=1883.233

b) pμ=(30+1)/2; **pμ**=15.5

15=1760

μ=1785

16=1810

c) M_o =no existe

d) CA=(510+4190)/2; **CA**=2350

2)

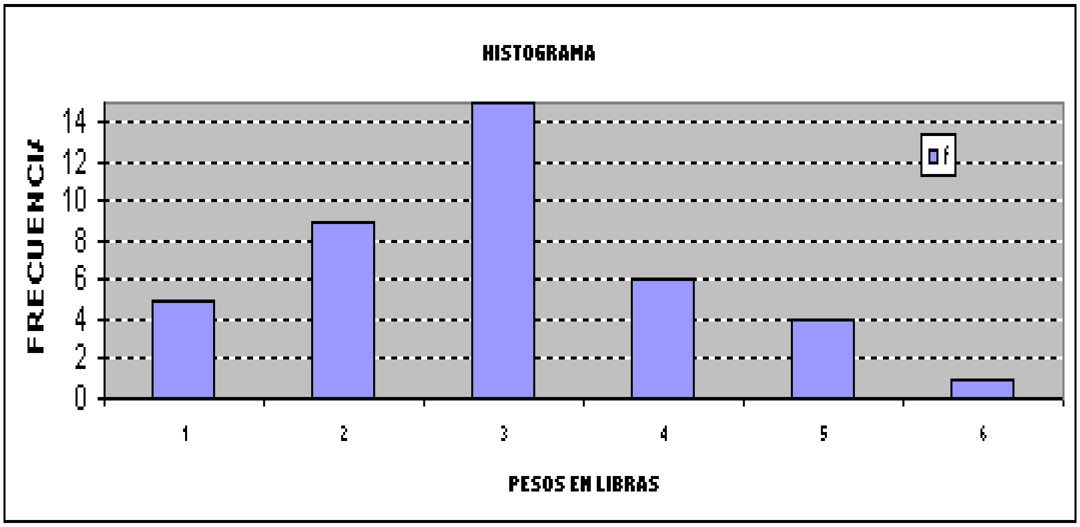
1	4	6																
1	5	8	0	9	0	2	2	3	5	5	6	8						
1	6	6	6	0	7	0	7	1	8	2	8	2	8	2	8	4	6	7
1	7	2	3	4	6	7	0	2										
1	8	0	1	4														
1	9	0																

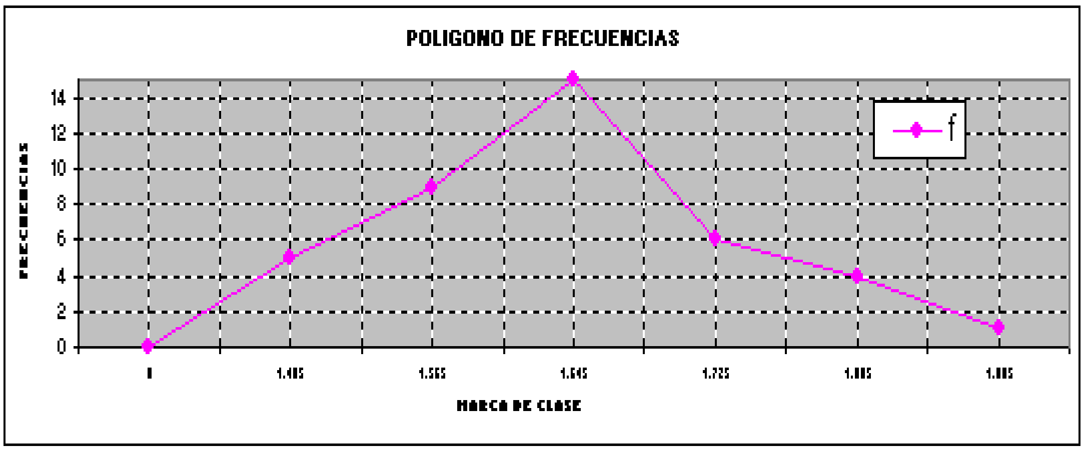
H=1.90; L=1.46; A=H-L; A=1.90-1.46; A=0.44, c=1.76-1.69=0.07+0.01=0.08, entonces m=6,

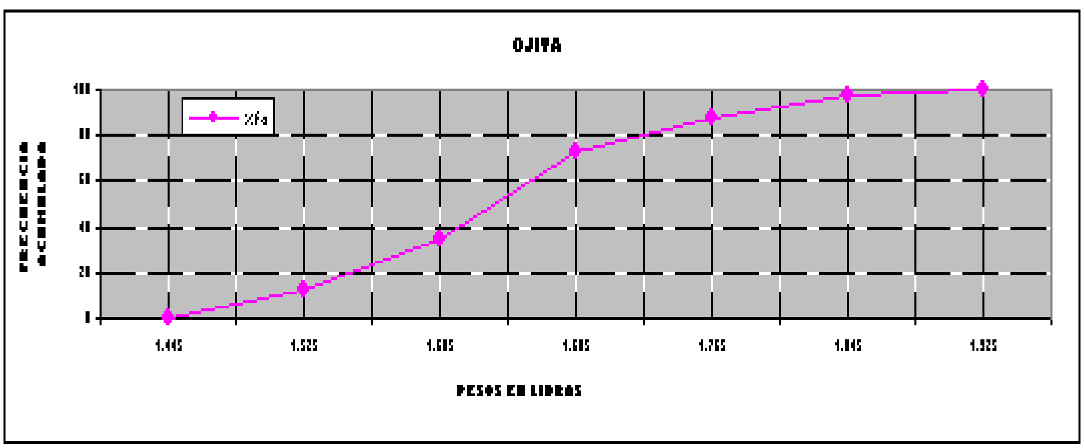
At=(0.08)*(6)=0.48; d=At-A; d=0.48-0.44; d=0.04; por lo tanto se le resta 2 a L y 2 a H.

L=1.46-0.02; L=1.44+0.01=1.45; H=1.90+0.02; H=1.92.

m	c		f	Fa	%fa	x	xf
1	1.45	1.52	5	5	12.5	1.485	7.425
2	1.53	1.6	9	14	35	1.565	14.085
3	1.61	1.68	15	29	72.5	1.645	24.675
4	1.69	1.76	6	35	87.5	1.725	10.35
5	1.77	1.84	4	39	97.5	1.805	7.22
6	1.85	1.92	1	40	100	1.885	1.885
		$\sum$	**40**			$\sum$	**65.64**


HISTOGRAMA
FRECUENCIA
14
12
10
8
6
4
2
0
1
2
3
4
5
6
f
PESOS EN LIBRAS


POLIGONO DE FRECUENCIAS
14
12
10
8
6
4
2
0
1.725
f
MARCA DE CLASE


OJIVA
100
%fa
1.445
1.525
1.765
1.845
1.925
PESOS EN LIBRAS

3) Medidas de Dispersión o Variabilidad. Esta medida nos da una idea del grado de indeterminación que se afronta en una situación donde está presente el azar. En estos casos aun sabiendo que no se tiene la total certidumbre sobre un posible resultado de la estimación de los datos, las medidas de dispersión ofrecen menores posibilidades de un equívoco cuando la dispersión de una distribución es pequeña en medida.

Estas medidas abarcan la magnitud (o rango), la varianza y la desviación estándar. Los cuales describen el grado de dispersión o variabilidad, de los datos. Los valores de estas medidas, serán mayores cuando los datos estén muy disgregados y, serán menores cuando los datos estén más cercanamente agrupados.

Amplitud. Es la medida de dispersión más sencilla y es la diferencia entre el dato de mayor valor **H** y el de menor valor **L. A=H-L.**

Varianza. Es la medida de separación con respecto a la medida y, su valor numérico se obtiene con la siguiente fórmula.

$$s^2=\sum(x-\bar{x})^2/(n-1) \qquad ; \qquad s^2=(\sum x^2-(\sum x)^2/n)/(n-1)$$

Nota. Se utiliza la 1° fórmula, si se conoce la media o si se tienen números enteros y; se utiliza la 2° fórmula, si la media no se conoce o si se tienen cifras decimales.

Desviación Estándar. Es la medida de separación con respecto a la media y, su valor numérico es la raíz cuadrada positiva de la varianza. $s=\sqrt{s^2}$.

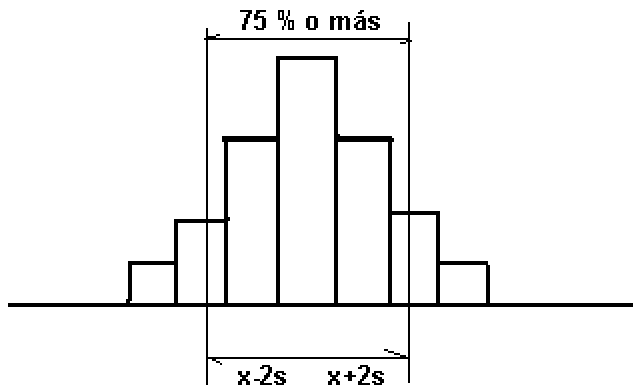
Interpretación y Comprensión de la Desviación Estándar. La desviación estándar es una medida de fluctuación (variabilidad) en los datos, se le ha definido como un valor que se calcula con fórmulas específicas. Pero, ¿cuál es su significado? Es una especie de "criterio de medición" mediante el cual puede compararse un conjunto de datos con otro. Esta medida particular puede ser comprendida mejor examinando dos enunciados; el Teorema de Chebyshev y la Regla Empírica.

RAP 3: Aplicar la regla empírica de la distribución normal, teorema de Chebyshev, para determinar el comportamiento de la distribución de frecuencias de un conjunto de datos de una población.

Teorema de Chebyshev o Tchebycheff. La proporción de cualquier distribución situada dentro de **k** desviaciones estándar de la media es, **por lo menos, $1-(1/k^2)$**; en donde **k** es cualquier número positivo mayor que 1. Este teorema es aplicable a cualquier distribución de datos.

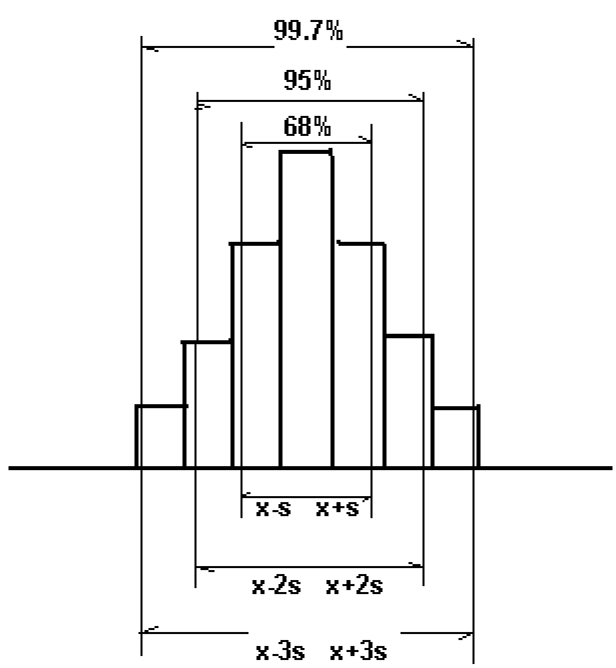
El teorema establece que siempre habrá al menos un 75% de los datos (es decir, 75% o más) dentro de dos desviaciones estándares de la media (k=2).

$$1-1/k^2=1-1/2^2=1-1/4=3/4=0.75 \quad \text{ó } 75\%.$$



Regla Empírica. Si una variable está distribuida normalmente, entonces hay un **68%** de los datos, aproximadamente dentro de **una desviación estándar** de la media. Para **dos desviaciones estándar** habrá un **95%** de la media. Y para **tres desviaciones estándar** de la media habrá un **99.7%** de los datos.

Esta regla es aplicable específicamente a una distribución normal (en forma de campana o de Gauss), aunque con frecuencia se aplica como guía a cualquier distribución. En caso contrario, el conjunto de datos no esta distribuido en forma normal.



Ejemplo.

Calcular las medidas de dispersión para dos desviaciones estándares del primer ejemplo (el de los pesos en libras de los 50 estudiantes).

m	x	f	$(x-\chi)^2$
1	102.5	4	2281.0176
2	114.5	10	1278.7776
3	126.5	3	564.5376
4	138.5	3	138.2976
5	150.5	7	0.0576
6	162.5	8	149.8176
7	174.5	5	587.5776
8	186.5	6	1313.3376
9	198.5	2	2327.0976
10	210.5	2	3628.8576
	Σ	50	12269.376

$\mathbf{s}^2$=250.395; **s**=15.824

χ–**s**=118.612; χ**+2s**=181.908;

120.5-118.612=1.888; x=10*(1.888)/12;
x=1.57»2

181.908-180.5=1.408; x=6*(1.408)/12;
x=0.704»1

2+3+3+7+8+5+1=29

x=29*(100)/50; c±s=58%

no cumple para ninguno de los dos

Ejercicios.

1) Calcular las medidas de dispersión para dos desviaciones estándares del primer ejercicio (el, de los salarios de los 30 estudiantes). **s^2=224 863.695, s=474.198, χ±2s=70%, no cumple con ninguno de los dos.**

2) Determinar las medidas de dispersión para tres desviaciones estándares del segundo ejercicio (la, de la estatura de los 40 empleados). **s^2=0.0032, s=0.057, χ±3s=92.5%, no cumple con la regla.**

3) De las 20 calificaciones que se indican, construye una tabla que agrupe los datos con un ancho de clase de 9 y traza las gráficas correspondientes. Calcula las medidas de tendencia central y la confiabilidad para dos desviaciones estándares.

78	76	82	96	76	84	52	78	76	74
58	92	66	72	82	62	74	68	88	86

m=5, μ=76, χ=75.350, s^2=43.1112, s=6.566, Q_3=82, P_{47}=76, χ±2s=70%, no cumple con ninguno de los dos.

4) Medidas de Posición. Estas medidas sirven para describir la localización de un dato específico en relación con el resto de la muestra.

Cuartiles. Son números que dividen a los datos ordenados en cuatro partes iguales; cada conjunto de datos tiene tres cuarteles.

Q=n/4.

Deciles. Son números que dividen a los datos ordenados en diez partes iguales; cada conjunto de datos tienen nueve deciles.

D=n/10.

Centiles o Porcentiles. Son números que dividen en cien partes iguales a un conjunto de datos ordenados; tal conjunto tiene noventa y nueve centiles.

C=P=n/100.

Nota. El primer $\mathbf{Q_1=P_{25}}$; el $\mathbf{Q_3=P_{25}}$ y; la mediana, el $\mathbf{Q_2}$ y $\mathbf{C_{50}}$ son iguales, es decir, $\mathbf{M=Q_2=C_{50}}$. Por tanto, utilícese este método para obtener la mediana cuando se trata de encontrar $\mathbf{P_{50}}$ o $\mathbf{Q_2}$.

Ejemplo. Calcular el segundo cuartil, el octavo decil y el 38 porcentil, del ejemplo de los pesos en libras de los 50 estudiantes. Además:

- **a)** ¿Qué porcentaje de los estudiantes pesan más de 157 lbs?
- **b)** ¿Qué porcentaje de los pesos debe disminuirse o incrementarse para tener una media de 155 lbs?
- **c)** ¿Cuántos estudiantes tienen mayor peso, si el 28% de ellos son los más pesados?
- **d)** ¿Qué porcentaje de los estudiantes tienen menor peso, si 17 de ellos son los más pesados?

$$Si\ n=50 \quad \therefore \quad Q=\frac{50}{4}=12.5 \quad ; \quad Q_2=2*(12.5)=25 \quad ; \quad Q_2=154\ lbs.$$

$$D=\frac{50}{10}=5 \quad ; \quad D_8=8*(5)=40 \quad ; \quad D_8=177\ lbs.$$

$$P=\frac{50}{100}=0.5 \quad ; \quad P_{38}=38*(0.5)=19 \quad ; \quad P_{38}=137\ lbs.$$

$$a) \quad \begin{matrix} 50\rightarrow 100 \\ 22\rightarrow x \end{matrix} \quad x=44\% \quad ; \quad b) \quad \begin{matrix} 150.26\rightarrow 100 \\ 155\rightarrow x \end{matrix} \quad x=103.15 \quad \therefore \quad 3.15\%\ debe\ incrementarse.$$

$$c) \quad \begin{matrix} 50\rightarrow 100 \\ x\rightarrow 28 \end{matrix} \quad x=14\ estudiantes \quad ; \quad d) \quad \begin{matrix} 17\rightarrow x \\ 50\rightarrow 100 \end{matrix} \quad x=34 \quad \therefore \quad 66\%\ tienen\ menor\ peso.$$

Ejercicios.

1) Calcular el tercer cuartil, el séptimo decil y el 28 porcentil, del ejercicio de los salarios de los 30 estudiantes. Además: $Q_3 = 2305 \quad ; \quad D_7 = 2100 \quad ; \quad P_{28} = 1230$

- **a)** ¿Qué porcentaje de los estudiantes ganan más de $2000.00 a la quincena? 40%
- **b)** ¿Qué porcentaje de los salarios debe disminuirse o incrementarse para tener una media de $1500.00? 20.35% debe disminuirse
- **c)** ¿Cuántos estudiantes tienen mayor salario, si el 14% de ellos son los que más ganan? 4 *estudiantes*
- **d)** ¿Qué porcentaje de los estudiantes tienen menor salario, si 14 de ellos son los que más ganan? 46.67%

2) Calcular el primer cuartil, el sexto decil y el 76 porcentil, del ejercicio de las estaturas de los 40 empleados. Además: $Q_1 = 1.58 \quad ; \quad D_6 = 1.67 \quad ; \quad P_{76} = 1.708$

- **a)** ¿Qué porcentaje de los empleados miden más de 1.76? 12.5%
- **b)** ¿Qué porcentaje de las estaturas debe disminuirse o incrementarse para tener una media de 1.67? 1.767% debe *incrementarse*
- **c)** ¿Cuántos empleados tienen mayor estatura, si el 24% de ellos son los que más chaparros? 10 *empleados*
- **d)** ¿Qué porcentaje de los empleados tienen menor estatura?, si 11 de ellos son los más altos.

3) Calcular el tercer cuartil, el cuarto decil y el 47 porcentil, del ejercicio de las 20 calificaciones. Además: $Q_3 = 82 \quad ; \quad D_4 = 74 \quad ; \quad P_{47} = 76$

- **a)** ¿Qué porcentaje de los alumnos tienen más de 76 de calificación? 45%
- **b)** ¿Qué porcentaje de las calificaciones debe disminuirse o incrementarse para tener una media de 80? 6.17% debe *incrementarse*
- **c)** ¿Qué porcentaje de los alumnos tienen menor calificación, si únicamente 2 de ellos tienen la calificación más alta? 90% *son los de menor estatura*
- **d)** ¿Qué porcentaje de los alumnos tienen menor calificación?, si 7 de ellos tienen mayor promedio.

4) Una estación de radar midió en kilómetros por hora la velocidad de 50 automóviles en una de las principales calles del D. F., las velocidades son:

43	48	54	56	58	60	62	65	67	70
44	45	47	48	50	54	56	59	61	62
65	67	72	51	53	53	55	57	60	61
63	65	68	75	56	56	57	60	61	64
65	69	79	58	60	62	64	65	70	80

a) Construye el histograma, el polígono de frecuencia y la ojiva. Para cinco intervalos de clase.
b) ¿Cuál es la confiabilidad para 3 desviaciones estándares?
c) ¿Cuál es el valor del segundo cuartil, el cuarto decil y el 73 porcentil?
d) ¿Qué porcentaje de los autos debe incrementar o disminuir su velocidad para tener una media de 60 Km./h?

5) Los salarios quincenales, en miles de pesos, de 40 obreros de una fábrica son:

1.19	1.25	1.36	1.43	1.50	1.53	1.59	1.64	1.70	1.90
1.20	1.30	1.37	1.45	1.50	1.55	1.60	1.70	1.70	1.90
1.21	1.30	1.39	1.47	1.50	1.55	1.63	1.70	1.80	1.95
1.25	1.35	1.40	1.48	1.51	1.58	1.63	1.70	1.85	2.07

a) Forma una distribución de frecuencias cuya cuarta clase sea de 1.64 a1.78
b) Construye el histograma, el polígono de frecuencia y la ojiva.
c) Compara y decide, si los datos recabados son confiables para dos desviaciones estándares.
d) ¿Cuál es el valor del primer cuartil, el octavo decil y el 68 porcentil?
e) Si el 25% de los obreros son los que más ganan, ¿cuántos obreros serán los que perciben menor salario?
f) ¿Qué porcentaje del salario debe incrementarse o disminuirse, para obtener una media de 3.5 mensual?

6) Los datos siguientes corresponden a la duración real de 40 acumuladores (baterías eléctricas) para automóvil. La garantía que ofrece el fabricante es de 3 años y la notación utilizada, especifica los años y los meses, así 3:02 quiere decir, que la batería duró 3 años y 2 meses.

3:02	3:01	2:11	3:02	3:11	2:02	3:04	3:05	2:06	4:08
3:08	3:01	3:04	4:01	3:00	4:01	1:07	4:04	3:01	3:09
3:00	4:08	2:11	1:11	4:02	3:06	3:01	3:05	3:08	3:02
2:07	3:08	3:01	3:05	3:06	4:06	3:04	3:07	4:05	2:07

a) Construye una tabla que agrupe los datos en intervalos de 6 meses.
b) Traza el histograma, el polígono de frecuencias y la ojiva
c) Calcula la media y la desviación estándar.
d) ¿Qué porcentaje de los acumuladores duró menos que la garantía ofrecida por el fabricante?
e) En un lote de 500 acumuladores que provienen del mismo proceso de fabricación, ¿cuántos acumuladores crees que duraran menos que la garantía ofrecida por el fabricante?
f) ¿Por qué crees que el fabricante ofrece una garantía menor que la duración promedio de los acumuladores?

SEGUNDO PERIODO

COMPETENCIA PARTICULAR

Resuelve problemas referentes a teoría de conjuntos, técnicas de conteo y probabilidad, en su ámbito académico, social y global

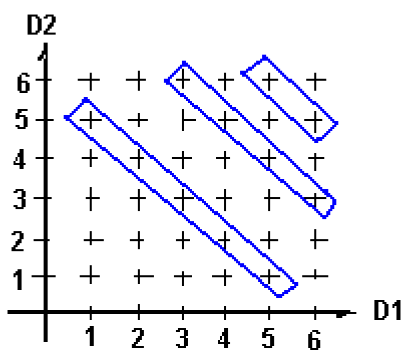
UNIDAD 2. PROBABILIDAD.

Regla de la Probabilidad. En un espacio muestral que contiene puntos muéstrales que son igualmente probables de ocurrir; la probabilidad **P (A)** de un evento **A**, es la razón del número de puntos que satisfacen la definición del evento **A**; **n(A)** con respecto al número de puntos muéstrales que hay en todo el espacio muestral; **n(S).** Es decir.

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}.$$

Ejemplos.

1) Si se lanzan 2 dados, ¿cuál será la probabilidad de que la suma de las caras que quedan hacia arriba sean de: **a)** 6; **b)** 9 y; **c)** 11.

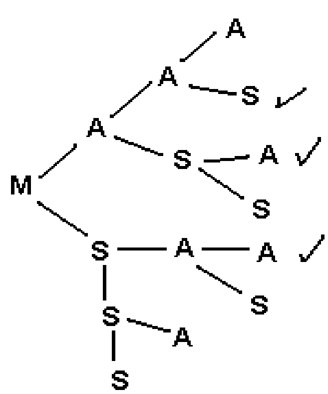


$$a)\quad P(6)=\frac{5}{36}\quad ó\quad 13.89\,\%.$$

$$b)\quad P(9)=\frac{4}{36}=\frac{1}{9}\quad ó\quad 11.11\,\%.$$

$$c)\quad P(11)=\frac{2}{36}=\frac{1}{18}\quad ó\quad 5.56\,\%.$$

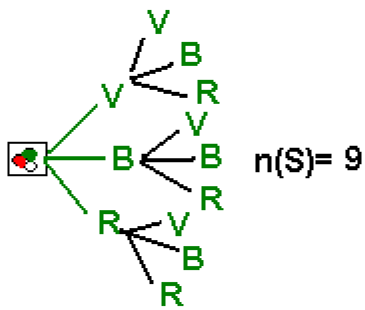
2) ¿Cuál es la probabilidad de obtener 2A y un sol, al lanzar tres veces una moneda?



$$n(2AyS)=3; \quad n(S)=8; \quad P(2AyS)=\frac{3}{8} \quad ó \quad 37.50\ \%.$$

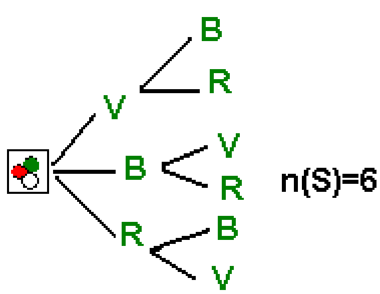
3) Una caja contiene tres canicas; una roja, una blanca y una verde. Dos de ellas se extraen con reemplazamiento, es decir, una vez que se ha elegido una canica se observa su color y luego vuelve a introducirse en la caja, las canicas son revueltas antes de extraer una segunda canica y observar su color.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que las canicas extraídas sea una verde y una blanca?



$$n(VyB)=2 \quad \therefore \quad P(VyB)=\frac{2}{9} \quad ó \quad 22.22\%$$

b) Si no hay reemplazamiento, ¿cuál será la probabilidad de que las canicas extraídas sea una verde y una blanca?



$$n(VyB)=2 \quad \therefore \quad P(VyB)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3} \quad ó \quad 33.33\%$$

Ejercicios.

1) Se lanzan 4 monedas simultáneamente, ¿cuál será la probabilidad de que ocurra: **a)** 2A y **b)** al menos 2A. $S \Rightarrow a)37.5\%\ y\ b)68.75\%$

2) Diana tiene 3 blusas, 4 faldas y 2 pantalones que más le gustan. ¿De cuántas formas puede combinarse sus vestimentas? $S \Rightarrow 18\ formas.$

3) En una caja se tiene igual número de canicas azules que amarillas y el doble de verdes que de azules. Si se extrae una canica;

- **a)** ¿Cuál es la probabilidad de que sea amarilla? $S \Rightarrow 25\%$
- **b)** ¿Cuál es la probabilidad de que sea verde? $S \Rightarrow 50\%$

4) Tres competidores olímpicos (Corea, México y Rumania) participaron en una prueba de natación. Corea tiene $\frac{5}{2}$ de probabilidad de ganar que Rumania, mientras que México tiene $\frac{3}{2}$ de probabilidad que Rumania. Calcula las probabilidades de cada uno de los competidores. $S \Rightarrow C = 50\%; M = 30\%\ y\ R = 20\%.$

5) Se lanzan dos dados, uno blanco y otro verde, encuentre la probabilidad de alcanzar un total de: **a)** 8; **b)** 11 y; **c)** 5.

$S \Rightarrow \frac{5}{36}\ ó\ 13.89\%$; $S \Rightarrow \frac{1}{18}\ ó\ 5.56\%$ y; $S \Rightarrow \frac{1}{9}\ ó\ 11.11\%$

6) Como pitcher (lanzador) de las ligas mayores, Fernando Valenzuela tiene un historial de lanzar un 80% de **strikes**. ¿Qué probabilidad hay de que su próximo bateador "vea" exactamente dos **strikes** en los siguientes cinco lanzamientos? $S \Rightarrow 32\%$

7) ¿Cuál será la probabilidad de formar 2A y 3S al tirar cinco veces una moneda? $S \Rightarrow 31.25\%$

8) El equipo de fútbol Atlas tiene el 70% de probabilidad de ganar cuando juega. Hallar la probabilidad de que en los próximos seis juegos gane exactamente cuatro partidos (no hay empates). $S \Rightarrow 46.67\%$

9) Un examen consta de diez preguntas de opción múltiple con tres respuestas posibles en cada una, si un alumno contesta al azar, ¿cuál es la probabilidad de que apruebe el examen? $S \Rightarrow 33.33\%$

Técnicas de Conteo. Las técnicas de conteo se usan para encontrar el número de resultados posibles de que suceda un evento, cuando es difícil controlarlos mediante diagramas de árbol o por ser muy grande el número de posibilidades.

Principio Fundamental. Si una decisión, operación o acción puede tomarse de $\mathbf{n_1}$ formas diferentes y si después que ha sido efectuada, una de estas formas, una segunda decisión puede tomarse de $\mathbf{n_2}$ formas distintas, y una tercera acción puede tomarse de $\mathbf{n_3}$ formas distintas, entonces el número total de acciones o decisiones que puedan formarse será igual a $\mathbf{n_1 x n_2 x n_3}$ que es lo que se conoce como *Principio Fundamental de Conteo.*

Ejemplos.

1) Un estudiante tiene que seleccionar una de las cuatro materias optativas; una actividad extraescolar de entre danza, teatro, música y guitarra, y entre uno de los siguientes idiomas; inglés, francés e italiano. ¿Cuántas maneras distintas tiene que escoger?

$$(4)(4)(3) = 48 \ maneras \ diferentes.$$

1) Una placa de automóvil en el D. F., consta de cuatro dígitos y tres letras.
- **a)** ¿Cuántas placas se pueden hacer sin restricción?
- **b)** Si la primera letra puede ser A, B, C, D, E, F y el primer dígito diferente de cero.
- **c)** ¿Cuántas, si letras y números deben ser diferentes y la primera letra sólo puede ser la A?

$$\begin{array}{llll} & dígitos & letras & \\ a) & (10)(10)(10)(10) & (26)(26)(26) & \Rightarrow 175760000 \ \ placas \ diferentes. \\ b) & (9)(10)(10)(10) & (6)(26)(26) & \Rightarrow 36504000 \ \ placas \ diferentes. \\ c) & (10)(9)(8)(7) & (1)(25)(24) & \Rightarrow 3024000 \ \ placas \ diferentes. \end{array}$$

2) Calcula el número posible de resultados en partidos que puede haber al llenar una boleta de pronósticos deportivos, si hay trece partidos y en cada uno hay tres opciones de ganar, empatar o perder.

$$n_t = (3)(3)(3)(3)(3)(3)(3)(3)(3)(3)(3)(3)(3) = 3^{13} = 1594323 \ opciones.$$

Ejercicios.

1) En un restaurante se puede servir cinco diferentes sopas, siete diferentes guisados y cuatro diferentes bebidas. ¿De cuántas maneras puede servirse el menú? $S \Rightarrow 140$.

2) Una persona tiene tres pantalones diferentes, dos camisas diferentes y dos pares de zapatos distintos. ¿De cuántas maneras se puede vestir? $S \Rightarrow 12$.

3) Las placas de los automóviles que circulan constan de tres letras diferentes, seguidas de tres dígitos distintos, de los cuales el primer número no debe ser cero (no se repite ninguna letra ni un número). ¿Cuántas placas diferentes se pueden fabricar? y ¿Cuántas se repiten? $S \Rightarrow 11372400 \;\; y \; 17714700$.

4) Si se tiene en el librero dos libros de matemáticas distintos, dos de física diferentes y dos de química diferentes, ¿de cuántas formas se pueden arreglar estos libros en el estante, considerando que deben quedar las dos de la misma materia juntas? $S \Rightarrow 48$.

Notación Factorial. Se define al factorial de un número al resultado de multiplicar ese número por todos los números enteros positivos menores que dicho número y se denota por $n! = n(n-1)(n-2)\ldots.3.2.1$ y se define al 0!=1.

Ejemplos. Calcular y/o simplificar las siguientes expresiones.

$$a)\quad \frac{18!}{16!} = \frac{18.17.16!}{16!} = 306. \qquad b)\quad \frac{6!}{14!} = \frac{6!}{14.13.12.11.10.9.8.7.6!} = \frac{1}{121080960}.$$

$$c)\quad \frac{n!}{(n-3)!} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)!}{(n-3)!} = n(n-1)(n-2) = n^3 - 3n^2 + 2n.$$

Análisis Combinatorio. Orientado al estudio de las probabilidades, el análisis combinatorio o análisis del número de formas en las que pueden presentarse los resultados de un proceso, ayuda a cuantificar la probabilidad de que ocurra un resultado en particular. Y tiene como elementos fundamentales las Permutaciones y las Combinaciones.

Permutaciones. Una permutación es una forma en la que pueden presentarse los objetos o eventos, y en la cual ***el orden de aparición es muy importante.***

$$Permutaciones\ de\ "n"\ objetos\ tomados\ de\ "r"\ en\ "r". = {}_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}.$$

En donde; **n** es el número total de objetos o eventos y, **r** el número de objetos que se desea considerar y puede ser desde **1** hasta **n.**

Ejemplos.

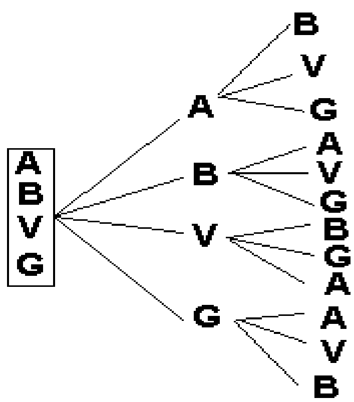
1) Los tres dígitos 2, 5 y 8 pueden formar los números 258, 285, 528, 582, 825 y 852. Cada uno de ellos es una permutación de los dígitos 2, 5 y 8, y refleja valores muy importantes entre sí.

2) Las letras A, V, E; forman: AVE, AEV, VAE, VEA, EAV y EVA. Son palabras diferentes.

Existen siete casos en las que pueden operarse las permutaciones.

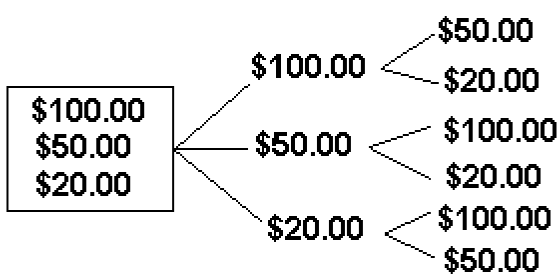
Primero. Permutar algunos objetos de todos diferentes. Pe. En una caja hay 4 canicas (Azul, Blanca, Verde y Gris) si se extraen de la caja dos de ellas, ¿en qué orden pueden aparecer?

$$_4p_2 = \frac{4!}{(4-2)!} = \frac{4.3.2!}{2!} = 12.$$



Segundo. Permutar todos los objetos, de todos diferentes. Pe. En una caja hay un billete de \$100.00, otro de \$50.00 y uno más de \$20.00. Tres personas van a tomar cada una un billete, sin ver. Determine las formas en que pueden distribuirse los billetes.

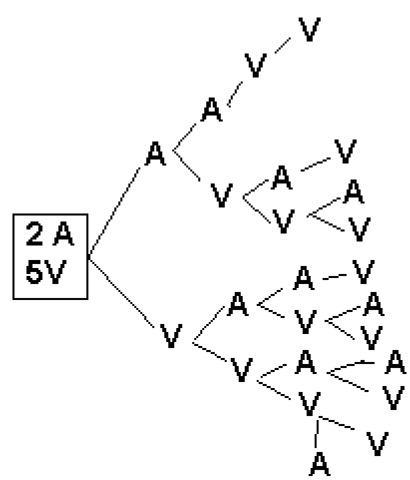
$$_3p_3 = \frac{3!}{(3-3)!} = \frac{3.2.1!}{1!} = 6.$$



Tercero. Permutar todos los objetos, de algunos repetidos. $Formas\ F=\frac{(k_1+k_2+...+k_n)!}{k_1!k_2!....k_n!}$. Pe. En una caja hay 2 canicas azules y 5 verdes. Si se extraen una por una de la caja, ¿en qué orden pueden aparecer?

$$F=\frac{(2+5)!}{2!\,5!}=\frac{5040}{240}=21.$$

Cuarto. Permutar algunos objetos, de algunos repetidos. No existe una fórmula fácil para determinar el número de permutaciones cuando se toman algunos objetos de un conjunto que contiene varios artículos iguales entre sí. Pe. En una caja hay 2 canicas azules y 5 verdes. Si se extraen 4 de ellas de la caja, ¿en qué orden pueden aparecer?



Quinto. Permutar con reemplazo. Esto es cuando el número de objetos sea limitado, pero el número de veces que se presenten sea infinito, Pe., cuando los objetos seleccionados pueden ser elegidos de nuevo. En las permutaciones anteriores, el número de objetos estaba perfectamente definido (4 canicas, 3 billetes, etc.). La diferencia entre una y otra se conoce como reemplazo. $Formas=n^m$. Pe. Los resultados posibles de un juego son perder o ganar. Si se juegan 4 juegos, ¿cuáles son los resultados posibles?

Lista

P	G	P	P	P	G	P	P	P	G	G	G	G	G	P	G
P	P	G	P	P	G	G	P	G	P	P	G	G	P	G	G
P	P	P	G	P	P	G	G	P	G	P	G	P	G	G	G
P	P	P	P	G	P	P	G	G	P	G	P	G	G	G	G

$$Formas=n^m=2^4=16.$$

Sexto. Permutar con Repetición. Con frecuencia se encuentran conjuntos de objetos iguales, si queremos saber el número de permutaciones, la fórmula esta dada por.

$$P=\frac{n!}{n_1!n_2!n_3!..n_r!};\ donde\ n_1\ son\ iguales,\ n_2\ son\ iguales,\ldots,\ n_r\ son\ iguales.$$

Pe. ¿Cuántas palabras diferentes se pueden formar con la palabra "ESTADÍSTICA"?

$$P=\frac{11!}{2!2!2!2!}=2\,494\,800.$$

Séptimo. Permutación Circular. Toda permutación de "n" objetos en la que el sucesor del último es el primero, se llama permutaciones circulares y está dada por la expresión. $P=(n-1)!$ Pe. ¿De cuántas maneras se puede acomodar doce personas en una mesa circular?

$$P=(12-1)!=39\,916\,800.$$

Ejercicios.

1) Calcular y/o simplificar las siguientes expresiones.

$$a)\ \frac{14!}{7!}.\quad S\Rightarrow 17297280;\quad b)\ \frac{15!}{18!}.\quad S\Rightarrow\frac{1}{4896};\quad d)\ \frac{x^{n-2}!}{x^{n+2}!}.\quad S\Rightarrow\frac{1}{x^{4n+2}}.$$

$$c)\ \frac{(n-r+2)!}{(n-r-2)!}.\quad S\Rightarrow(n-r+2)(n-r+1)(n-r)(n-r-1);\quad e)\ \frac{y^{2n+3}!}{y^{2n-4}!}.\quad S\Rightarrow y^{14n}.$$

2) La mesa directiva (presidente, secretario y tesorero) de una asociación va a elegir de entre 5 candidatos, identificados con las letras A, B, C, D y D. Suponga que cualquiera de ellos es apto para cualquier puesto y determine el número de formas diferentes en que puede quedar integrada la mesa directiva. $S\Rightarrow 60.$

3) En una caja hay 4 canicas (Azul, Blanca, Verde y Gris). Si se extraen una por una de la caja, ¿en qué orden pueden aparecer? $S\Rightarrow 24.$

4) Los resultados posibles de un juego son perder, empatar y ganar. Si se juegan 5 juegos, ¿cuáles son los resultados posibles? $S\Rightarrow 243.$

5) Determinar el valor de las siguientes expresiones.

$$a)\ \frac{96!}{91!}.\quad S\Rightarrow 7\,334\,887\,680;\quad b)\ \frac{27!}{25!}.\quad S\Rightarrow 702;$$

$$c)\ \frac{(n+2)!}{(n-1)!}.\quad S\Rightarrow(n+2)(n+1)(n);\quad d)\ \frac{(n-2)!}{(n+3)!}.\quad S\Rightarrow\frac{1}{(n+3)(n+2)(n+1)(n)(n-1)}.$$

6) Si 25 corredores compiten en una carrera de 5 km., ¿cuántos competentes se pueden ganar los 3 primeros premios? $S \Rightarrow 13800.$

7) ¿Cuántas palabras diferentes se pueden formar con la palabra "SUPERSTICIOSO"? $S \Rightarrow 259\,459\,200.$

8) Se tienen 6 ejemplares de un libro y 8 de otro. Halle el número total de formas distintas en que pueden arreglarse todos en un librero. $S \Rightarrow 3003.$

9) En un zoológico se exhibirán en 8 jaulas 5 leones numerados del 1 al 5 y 3 tigres numerados del 1 al 3.
a) ¿De cuántas formas diferentes pueden colocarse? $S \Rightarrow 40\,320.$
b) Si los tigres deben estar en jaulas contiguas, ¿de cuántas formas podrán exhibirse los leones y los tigres? $S \Rightarrow 720.$

10) Encuentre el número de señales diferentes que se pueden hacer con 4 banderas verdes, 2 azules y 1 blanca, si todas son del mismo tamaño y tomamos todas a la vez. $S \Rightarrow 105.$

Combinaciones. Una combinación es una forma en la que pueden presentarse los objetos o eventos, y en la cual ***el orden de aparición no importa.*** Pe, la multiplicación de los dígitos 2, 5 y 8 puede hacerse de muchas formas diferentes. 2*5*8, 2*8*5, 5*2*8, etc., pero en todos los casos el resultado será el mismo.

$$Permutaciones\ de\ "n"\ objetos\ tomados\ de\ "r"\ en\ "r". = {}_nC_r = \frac{n!}{r!*(n-r)!}.$$

En donde; **n** es el número total de objetos o eventos y, **r** el número de objetos que se desea considerar.

Nota. Para cualquier pareja de números enteros positivos "n" y "r", exceptuando r=1. El número de permutaciones es mayor que el número de combinaciones.

Ejemplos.

1) Hay un grupo de cinco personas, las que pueden identificarse con las letras A, B, C, D y E. De ellas se van a seleccionar tres para una misión especial. ¿De cuántas formas diferentes se pueden seleccionar las tres personas?

$${}_5C_3 = \frac{5!}{3!(5-3)!} = \frac{5.4.3!}{3!2} = 10.$$

LISTA		
A	B	C
A	B	D
A	B	E
A	C	D
A	C	E
A	D	E
B	C	D
B	C	E
B	D	E
C	D	E

2) Una preselección de fútbol está formada por 25 jugadores. ¿De cuántas formas diferentes puede el entrenador integrar un equipo de 11 jugadores?

$$_{25}C_{11} = \frac{25!}{11!(25-11)!} = \frac{25.24.23.22.21.20.19.18.17.16.15.14!}{11.10.9.8.7.6.5.4.3.2.14!} = \frac{5.23.2.19.2.17.2.15.14!}{14!} = 4\,457\,400.$$

3) Calcular la probabilidad de obtener en una mano de 5 naipes, tomados de una baraja de 52 cartas.

$$_{52}C_{5} = \frac{52!}{5!(52-5)!} = \frac{52.51.50.49.48.47!}{5.4.3.2.47!} = \frac{26.17.10.49.12.47!}{47!} = 2\,598\,960.$$

$$_{13}C_{5} = \frac{13!}{5!(13-5)!} = \frac{13.12.11.10.9.8!}{5.4.3.2.8!} = \frac{13.11.9.8!}{8!} = 1\,287.$$

$$P(5E) = \frac{_{13}C_5}{_{52}C_5} = \frac{1\,287}{2\,598\,960} = 4.95X10^{-4} = 0.0005 \text{ ó } 0.05\%$$

Multiplicación de Combinaciones. Esto sucede en las combinaciones y es una forma de lo más común, en la cual es necesario multiplicar los resultados parciales de dos o más combinaciones. Pe.

4) De un total de 5 hombres y 4 mujeres se va a formar un comité de 3 hombres y 2 mujeres. ¿De cuántas formas puede quedar integrado?

$$_{5}C_{3} = \frac{5!}{3!(5-3)!} = \frac{5.4.3!}{2.3!} = 10. \quad _{4}C_{2} = \frac{4!}{2!(4-2)!} = \frac{4.3.2!}{2.2!} = 6. \quad Formas = (10)(6) = 60.$$

Ejercicios.

1) En una bolsa hay seis monedas, marcadas con los números 1, 2, 3, 4, 5 y 6 se van a tomar al azar cuatro monedas. ¿De cuántas formas diferentes se pueden tomar las monedas? $S \Rightarrow 15$.

2) En un ejército hay 20 000 soldados, y de ellos se van a seleccionar 100 para una misión especial. ¿De cuántas formas diferentes se pueden seleccionar los 100 soldados? $S \Rightarrow 1.0601x10^{270}$.

3) En una caja hay 39 esferas, marcadas con los números del 1 al 39. Si se toman al azar 6 esferas, ¿de cuántas formas diferentes pueden resultar;

a) si se considera el orden de aparición? $S \Rightarrow 2\,349\,088\,560$.

b) si no se considera el orden de aparición? $S \Rightarrow 3\,262\,623$.

4) De una lista de 20 donadores de sangre, hay 15 individuos de tipo “B”, si de esta lista 3 de ellos se eligen al azar, ¿cuál es la probabilidad de que;
a) Los tres sean de tipo “B”? $S \Rightarrow 39.91\%$.

b) Dos sean de tipo “B” y uno no lo sea? $S \Rightarrow 46.05\%$.
c) Al menos uno de ellos sea de tipo “B”? $S \Rightarrow 99.12\%$.

5) En una caja se tienen 15 focos, de los cuales 6 están fundidos. Si se extraen 3 focos al azar, ¿cuál es la probabilidad de que por lo menos uno de ellos este fundido? $S \Rightarrow 81.53\%$.

6) Una caja con 25 refacciones automotrices, contiene 20 en buen estado. Si se toman 4 refacciones al azar, ¿cuál es la probabilidad de que;

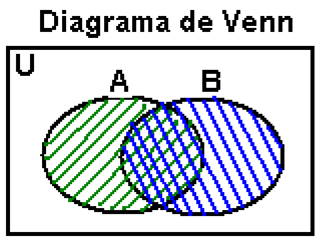
a) Éstas sean buenas refacciones? $S \Rightarrow 38.3\%$.
b) Todas resulten defectuosas? $S \Rightarrow 0.0395\%$.
c) 3 sean buenas y una mala? $S \Rightarrow 45.05\%$.
d) 2 por lo menos sean buenas? $S \Rightarrow 98.35\%$.

7) En la estación Pino Suárez del metro, después de descender los pasajeros, quedan cuatro asientos vacíos. Sí por la puerta más próxima entran 19 personas, ¿de cuántas formas distintas pueden ser ocupados los asientos? $S \Rightarrow 3\,876$.

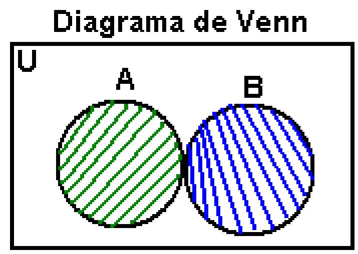
8) En un examen de E. T. S., incluye un total de siete preguntas. Si se deben responder sólo cinco, ¿cuántas formas distintas hay de resolver el examen? $S \Rightarrow 21$.

Probabilidades Subjetivas. Esto sucede cuando el único método disponible para asignar probabilidades es el juicio personal y la precisión de éstos depende de la habilidad individual para valorar correctamente una situación.

Eventos Mutuamente Excluyentes. Son eventos definidos de manera que la ocurrencia de uno imposibilita la ocurrencia de los demás (si alguno de ellos sucede, los restantes no pueden suceder).



Eventos que no son mutuamente Excluyentes



Eventos mutuamente excluyentes

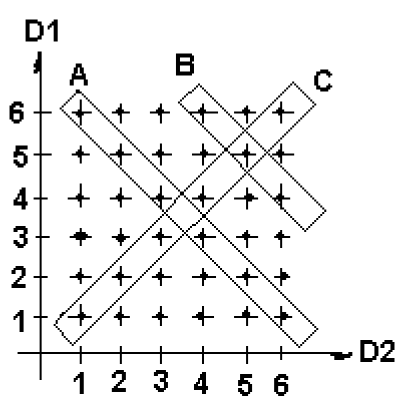
Nota. Decir P(A y B), es decir P(A $\cap$ B) y; decir P(A o B), es decir P(A $\cup$ B).

Regla de la Adición. Es la Probabilidad Compuesta P(A o B); en donde A y B son eventos mutuamente excluyentes y se aplica la siguiente regla. $P(A\, o\, B) = P(A) + P(B)$. Pero, si los eventos A y B no son mutuamente excluyentes se aplica la siguiente regla general. $P(A\, o\, B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Ejemplos.

1) Se lanzan dos dados y se definen tres eventos: **A** es la suma de los números en los dados igual a 7; **B** es la suma de los números en los dados igual a 10 y; **C** cada dado muestra el mismo número.

a) ¿cómo son los eventos A y B; B y C y; A y C?
b) ¿cuál es la probabilidad del evento A, B y C?
c) ¿cuál es la probabilidad de A o B?
d) ¿cuál es la probabilidad de B o C?



a) A y B son eventos mutuamente excluyentes; B y C no son eventos mutuamente excluyentes y; A y C son eventos mutuamente excluyentes.

b)
$$n(S)=36;\quad n(A)=6;\quad n(B)=3\quad y;\quad n(C)=6.\quad P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}=16.67\%$$
$$P(B)=\frac{n(B)}{n(S)}=\frac{3}{36}=\frac{1}{12}=8.3\%\quad y\quad P(C)=\frac{n(C)}{n(S)}=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}=16.67\%$$

c) $P(A\ o\ B)=P(A)+P(B)=\frac{6}{36}+\frac{3}{36}=\frac{9}{36}=\frac{1}{4}=25\%$

d) $P(B\ o\ C)=P(B)+P(C)-P(B\cap C)=\frac{3}{36}+\frac{6}{36}-\frac{1}{36}=\frac{8}{36}=\frac{2}{9}=22.22\%$

2) En el grupo 6IM6, 80 mujeres y 60 hombres son estudiantes de tiempo completo y; 20 hombres y 40 mujeres son de tiempo parcial. Si se selecciona un alumno aleatoriamente, en la cual, el evento A es el alumno elegido de tiempo completo y, B el alumno seleccionado de tiempo parcial y además es hombre.

a) ¿cuál es la probabilidad de los eventos A o B?
b) ¿cuál es la probabilidad de que el alumno sea mujer o de tiempo completo?

	TIEMPO COMPLETO	TIEMPO PARCIAL	TOTAL
MUJERES	80	40	120
HOMBRES	60	20	80
TOTAL	140	60	200

$$n(S)=200;\quad n(A)=140;\quad n(B)=20;\quad n(M)=120;\quad n(TC)=140\quad y;\quad n(M\ y\ TC)=80.$$
$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{140}{200}=\frac{7}{10}=70\%;\quad P(B)=\frac{n(B)}{n(S)}=\frac{20}{200}=\frac{1}{10}=10\%;$$
$$P(M)=\frac{n(M)}{n(S)}=\frac{120}{200}=\frac{6}{10}=60\%;\quad P(TC)=\frac{n(TC)}{n(S)}=\frac{140}{200}=\frac{7}{10}=70\%\quad y;\quad P(M\ y\ TC)=\frac{n(M\ y\ TC)}{n(S)}=\frac{80}{200}=\frac{4}{10}=40\%.$$

a)
A y B son eventos mutuamente excluyentes, por tanto
$$P(A\ o\ B)=P(A)+P(B)=\frac{7}{10}+\frac{1}{10}=\frac{8}{10}=80\%$$

b)
M y TC no son eventos mutuamente excluyentes, por tanto
$$P(M\ o\ TC)=P(M)+P(TC)-P(M\ y\ TC)=\frac{7}{10}+\frac{6}{10}-\frac{4}{10}=\frac{9}{10}=90\%$$

Ejercicios.

1) Se lanza un dado blanco y otro verde.

a) Hallar la probabilidad de que el dado blanco sea un número menor que 3, o bien que la suma de los dados sea mayor que 9. $S \Rightarrow 50\%$.

b) ¿cuál es la probabilidad de que los dados sumen 10 u 11, o bien que los dados sean números dobles? $S \Rightarrow 27.78\%$.

2) De la siguiente tabla, determine lo que se indica.

AMANECER	DÍA		SUBTOTAL
	LLUVIOSO	SECO	
NUBLADO	44	95	
SOLEADO	29	197	
SUBTOTAL			

a) ¿cuál es la probabilidad de que llueva un día cualquiera? $S \Rightarrow 20\%$.

b) Hallar la probabilidad de que un día cualquiera éste soleado al amanecer y seco durante el día. $S \Rightarrow 53.97\%$.

c) ¿cuál es la probabilidad de que un día cualquiera este nublado o soleado lluvioso? $S \Rightarrow 46.03\%$.

d) ¿cuál es la probabilidad de que un día cualquiera este nublado al amanecer o lluvioso durante el día? $S \Rightarrow 46.03\%$.

3) Los empleados del CECyT No. 11 “WM” fueron clasificados de acuerdo con su edad y adscripción a la administración, cuerpo docente y personal e apoyo.

ADSCRIPCIÓN	GRUPO DE EDADES EN AÑOS				TOTAL
	20-30	31-40	41-50	51 O MÁS	
ADMINISTRACIÓN	2	24	16	2	
GRUPO DOCENTE	1	40	36	28	
PERSONAL DE APOYO	16	20	14	17	
TOTAL					

Considerando que se selecciona un empleado en forma aleatoria, obtenga la probabilidad de que el elegido:

a) Este en la administración o tenga 51 o más años.

b) No sea miembro del cuerpo docente.

c) Sea miembro del cuerpo docente dado que el individuo tiene 41 o más años.

4) Se lanzan dos dados, en donde **A** y **F** denotan los eventos de alcanzar una puntuación de 7 y 11, respectivamente.

a) ¿Cuál es la probabilidad de alcanzar un total de 7 u 11? $S \Rightarrow 22.22\%$.

b) ¿Cuál es la probabilidad de obtener un total de al menos 10 puntos al tirar los dos dados? $S \Rightarrow 16.67\%$.

c) ¿Cuál es la probabilidad de que al tirar los dos dados la suma total de puntos mostrados sea exactamente 7 siempre y cuando los dados muestren por lo menos tres puntos cada uno? $S \Rightarrow 12.50\%$.

COMPETENCIA PARTICULAR

Emplea distribuciones de probabilidad en la solución de problemas en los ámbitos académico, social y global.

UNIDAD 3. PROBABILIDAD CONDICIONAL.

Probabilidad Condicional. El símbolo **P(A/B)** representa la probabilidad de que ocurra **A**, dado que **B** ya ha ocurrido. Por lo tanto, los eventos **A** y **B** son independientes si: **P(A/B)=P(A)** o si **P(B/A)=P(B)**, y; la probabilidad condicional $P(A/B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}$; en caso de ser dependientes.

Eventos Independientes. Dos eventos **A** y **B** son independientes si la ocurrencia o no ocurrencia de uno no afecta la probabilidad asignada a la ocurrencia del otro. La independencia es la propiedad necesaria para multiplicar probabilidades. Por lo tanto, si los eventos son independientes.

$$P(AyB)=P(A\cap B)=P(A)*P(B).$$

Y si los eventos no son independientes (es decir, son dependientes).

$$P(AyB)=P(A\cap B)=P(A)*P(B/A) \quad y/o \quad P(ByA)=P(B\cap A)=P(B)*P(A/B).$$

Nota. Existen varios casos cuyo resultado es el evento compuesto **"y"**, algunos de los más comunes son:

a) **A** seguido por **B**.
b) **A** y **B** ocurrieron simultáneamente.
c) Tanto **A** como **B**.
d) **A** pero no **B**, equivalente a **A** y no **B**.

Ejemplos.

1) Se lanzan un dado, el evento **A** indica si ocurre un **4** y el evento **B** si ocurre un par.

a) ¿Cómo son los eventos **A** y **B**?
b) ¿Cuál es la probabilidad condicional de **P(A/B)**?

$$Dado \Rightarrow 1,2,3,4,5,6 \quad n(A)=1; \quad n(B)=3; \quad n(S)=6$$

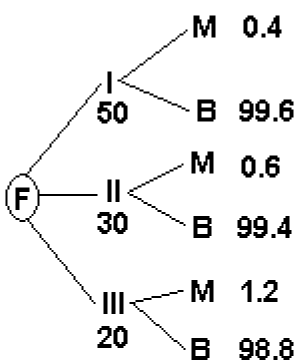
$$a) \quad los\ eventos\ son\ dependientes. \quad P(A \cap B)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{1}{6};$$

$$P(B)=\frac{n(B)}{n(S)}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}; \quad b) \quad P(A/B)=\frac{P(A \cap B)}{P(B)}=\frac{\frac{1}{6}}{\frac{3}{6}}=\frac{(1)(6)}{(6)(3)}=\frac{1}{3}=33.33\%$$

2) En una fábrica de enlatados, las líneas de ensamble I, II y III representan el 50, 30 y 20 % de la producción total. Si se sella inadecuadamente 0.4 % de las latas de la línea de ensamble I y, 0.6 y 1.2 % de las líneas de ensamble II y III. ¿Cuál es la probabilidad de que:

a) Una lata producida en esta fábrica de conservas éste mal sellada?

b) Una lata mal sellada provenga de la línea de ensamble I?



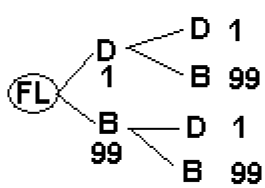
$$a) \quad los\ eventos\ son\ dependientes.$$

$$P(M)=(0.50)(0.004)=0.0020;$$
$$(0.30)(0.006)=0.0018;$$
$$(0.20)(0.0120)=0.0024.$$
$$=0.0062 = 0.62\ \%$$

$$b) \quad P(M/I)=\frac{P(M \cap I)}{P(M)}=\frac{0.0020}{0.0062}=0.3226 = 32.26\ \%$$

3) Una fábrica de lapiceros logra una producción de sólo el 1 % de defectuosos. ¿Cuál es la probabilidad de tomar dos lapiceros al azar y que éstos sean:

a) D, D; **b)** D, B; **c)** B, B?



$$a) \quad P(D,D)=(0.01)(0.01)=0.01\,\%;$$
$$b) \quad P(D,B)=(0.01)(0.99)=1.98\,\%;$$
$$c) \quad P(B,B)=(0.99)(0.99)=0.9801.$$

El producto indica la dependencia.

Ejercicios.

1) Suponga que el 80% de los compradores de automóviles usados son personas solventes. Supóngase además que hay una probabilidad del 70% de que un individuo solvente sea portador de una tarjeta de crédito, pero que esta probabilidad es de sólo el 40% para una persona no solvente. Calcular la probabilidad de que:

- **a)** Un comprador elegido al azar tenga tarjeta de crédito. $S \Rightarrow 64\%$.
- **b)** Un comprador elegido al azar que tenga tarjeta de crédito sea una persona solvente. $S \Rightarrow 87.50\%$.
- **c)** Un comprador elegido al azar que no tenga tarjeta de crédito sea solvente. $S \Rightarrow 66.50\%$.

2) Una persona normalmente sale de vacaciones a Morelia el 20%, el 35% de las veces a Veracruz y el resto a Acapulco. En Morelia dedica el 80% del tiempo a visitar museos; en Veracruz, el 40% del tiempo lo pasa en la playa y; en Acapulco el 70% del tiempo a esa actividad.

a) Si se sabe que la persona fue a la playa, ¿cuál es la probabilidad de que haya ido a Acapulco? $S \Rightarrow 69.23\%$.

b) Si se sabe que la persona no fue a la playa, ¿cuál es la probabilidad de que haya ido a Morelia? $S \Rightarrow 36.70\%$.

3) Una caja con 15 refacciones de cierto tipo de maquina contiene 10 refacciones en buen estado y 5 en malas condiciones. Si se toman al azar 3 refacciones, ¿cuál es la probabilidad de que:

- **a)** sean buenas refacciones? $S \Rightarrow 26.37\%$.
- **b)** Todas estén en malas condiciones? $S \Rightarrow 2.20\%$.
- **c)** 2 sean buenas y una mala? $S \Rightarrow 49.45\%$.
- **d)** 2 por lo menos sean buenas? $S \Rightarrow 75.82\%$.

4) ¿Cuál es la probabilidad de obtener dos bolas rojas en dos extracciones consecutivas de una caja que tenga tres bolas rojas, dos negras y una verde. Suponiendo que la primera bola extraída no se regresa a la caja antes de hacer la segunda extracción? $S \Rightarrow 20.00\%$.

5) Gabriela tiene 4 blusas, 3 faldas y 4 pantalones.

a) ¿cuál es la probabilidad de que se ponga una blusa y un pantalón? $S \Rightarrow 29.10\%$.

b) ¿cuál es la probabilidad de que elija una blusa y una falda? $S \Rightarrow 21.80\%$.

6) Un aparato para probar circuitos de radio siempre detecta un circuito defectuoso, pero en el 2% de las veces que indica que un circuito es malo se tiene que, en verdad, el circuito está en buen estado. Si el 97% de los circuitos fabricados son buenos, ¿qué probabilidad hay de que un circuito nuevo elegido al azar y señalado como defectuoso por el aparato detector sea en realidad un circuito en buenas condiciones? $S \Rightarrow 39.75\%$.

Teorema de Bayes. Thomas Bayes (Matemático ingles, 1702-1761) desarrollo una fórmula que puede simplificar el cálculo de las probabilidades condicionales. La fórmula de Bayes, en su forma más sencilla, permite calcular la probabilidad de que ocurra el evento **B**, si se sabe que ya ocurrió el evento **A**, esto es, **P(B/A).** Para ello se requiere conocer la probabilidad simple de que ocurra el evento **A**, o sea **P(A)**; la probabilidad simple de que ocurra el evento **B**, es decir, **P(B)** y; la probabilidad de que ocurra el evento **A**, si se sabe que ya ocurrió el evento **B**, o sea, **P(A/B)**. Por lo tanto.

$$P(B/A) = \frac{P(A/B) * P(B)}{P(A)}.$$

Ejemplos.

1) El 55.26% de los automóviles de un estacionamiento son de 4 puertas, los automóviles blancos son el 21.27% del total y, los automóviles de cuatro puertas escogidos de entre los blancos son el 59.77%. Determine el porcentaje de los autos blancos escogidos de entre los de cuatro puertas.

$$A \Rightarrow autos\ con\ 4\ puertas\ 55.26\%$$

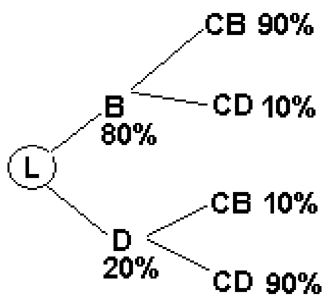
$$B \Rightarrow autos\ blan\cos\ 21.27\%$$

$$A/B \Rightarrow autos\ de\ 4\ puertas\ escogidos\ de\ los\ blan\cos\ 59.77\%$$

$$P(B/A) = \frac{P(A/B) * P(B)}{P(A)} = \frac{(0.5977)*(0.2127)}{(0.5526)} = 0.2301\ ó\ 23.01\%$$

2) Una fábrica produce lámparas eléctricas. En promedio, el 20% de ellas tiene algún defecto. Antes de ser empacadas se revisa cada pieza. El inspector clasifica erróneamente las lámparas el 10% de los casos, es decir; p(sea clasificada erróneamente/la lámpara buena)=p(sea clasificada como bueno/la lámpara con algún defecto)=10%

- **a)** ¿qué proporción de las lámparas será clasificada en buen estado?
- **b)** Ahora, supóngase que solo se empacan las lámparas que pasan la inspección, los que no la pasan son destruidas, ¿cuál es la calidad de las lámparas empacadas?



$P(B) = 80\%$ a) $P(CB) = (0.80)*(0.90) + (0.20)*(0.10) = 74\%.$

$P(D) = 20\%$ b) $P(B/CB) = \dfrac{P(CB/B)*P(B)}{P(CB)}.$

$P(CB/B) = 90\%.$ $P(B/CB) = \dfrac{(0.90)*(0.80)}{(0.74)} = 97.29\%$

Ejercicios.

1) La máquina **A** de una fábrica de alfileres produce el 58% de la producción, mientras que la máquina **B** produce el resto. La máquina **A** produce el 2% de alfileres defectuosos, en tanto que la máquina **B** el 4%. ¿Cuál es la probabilidad de que, al tomar al azar un alfiler;

a) Éste sea defectuoso? $S \Rightarrow 2.84\%.$

b) Éste sea defectuoso y provenga de la máquina **B**? $S \Rightarrow 59.15\%.$

2) Una caja contiene 6 billetes de $20.00, 3 de $50:00 y 1 de $100.00, determine la probabilidad de que, al extraer al azar;

a) uno de éstos, éste sea de $100.00, $S \Rightarrow 10\%.$

b) uno de éstos, éste sea de $50.00 ó $100.00 y, $S \Rightarrow 40\%.$

c) dos de estos, ambos sean de $20.00. $S \Rightarrow 33.33\%.$

3) Se tiene dos urnas; la urna 1 tiene 11 pelotas, 8 verdes y 3 blancas; la urna 2 tiene 9 pelotas, 7 verdes y 2 blancas.

a) Calcular la probabilidad de sacar una pelota verde de la urna 1. $S \Rightarrow 36.36\%.$

b) Hallar la probabilidad de sacar una pelota verde. $S \Rightarrow 75.25\%.$

c) Suponga que una persona ya saco una pelota verde, ¿cuál es la probabilidad de que proceda de la urna 2? $S \Rightarrow 51.68\%.$

4) En la WM el 35% de los alumnos son de 1er semestre, el 20 del tercero y cuarto, del total de los primeros cuatro semestres. El 90% del primer semestre cursan matemáticas, el 70% del segundo, el 50% del tercero y solamente el 30% del cuarto semestre. Si se escoge al azar un alumno y éste cursa matemáticas, ¿cuál es la probabilidad de que sea de segundo semestre? $S \Rightarrow 26.92\%.$

TERCER PERIODO

UNIDAD 3: DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD.

RAP1. *Aplicar las distribuciones de probabilidad de variables aleatorias discretas para predecir resultados en una población, en el contexto de la resolución de problemas en diversas áreas del conocimiento*

ESPERANZA MATEMÁTICA.

Con frecuencia es conveniente calcular el promedio de los resultados de un proceso o experimento, ponderado por la probabilidad de que suceda cada uno de los resultados posibles. A este promedio se le conoce como "Esperanza Matemática" y permite entre otras cosas, comparar dos o más alternativas.
La esperanza matemática es un concepto que se emplea mucho en la teoría de decisiones, en la ciencia de la administración, en el análisis de sistemas, en la teoría de juegos y en otros muchos campos intelectuales.

$$EM = \sum \left(cada\ evento\ por\ su\ probabilidad \right).$$

$$EM = \sum_{i=1}^{n} \left(x_i P_i \right).$$

Ejemplos.

1) ¿Qué es mejor; una probabilidad de 0.001 de ganar un contrato de $3,000 000.00 o una probabilidad de 0.002 de ganar un contrato de $2,000 000.00?

EM_1=(0.001)(3 000 000)= $3 000.00
EM_2=(0.002)(2 000 000)= $4 000.00

Sol. » La segunda oferta.

2) En un sorteo se ofrecerán 6 premios; uno de $100 000.00, dos de $50 000.00 y, 3 de $30 000.00; suponiendo que se distribuyen los mil boletos del sorteo y sin considerar gastos de administración u otros, ¿cuánto debe costar el boleto para cubrir el costo de los premios?

$CB=(1*100{,}000+2*50{,}000+3*30{,}000)/1000$

$CB=\$290.00$

Nota: observa que la EM es, en este caso, el costo unitario de los premios por cada boleto.

3) Una caja contiene 10 lapiceros, de ellos 3 son defectuosos. Se extrae una muestra de 3 de ellos al azar, si se tiene la variable aleatoria **x=**{al número de defectuosos extraídos}. Elaborar una tabla de distribución de probabilidad (con la acumulada) y calcular el valor esperado y la desviación estándar.

n(S)= $_{10}C_3$=120 eventos; x(S)= ={0, 1, 2 y 3};

tipos de eventos {bbb, bbd, bdd y ddd}.

$X_0 = {}_3C_0 * {}_7C_3 = (1)*(35) = 35$
$X_1 = {}_3C_1 * {}_7C_2 = (3)*(21) = 63$
$X_0 = {}_3C_2 * {}_7C_1 = (3)*(7) = 21$
$X_0 = {}_3C_3 * {}_7C_0 = (1)*(1) = 1$

Tabla de Distribución de probabilidad:

x	**$P(x_i)$**	**$x_i P(x_i)$**
0	35/120=0.29	0*0.29=0
1	63/120=0.52	1*0.52=0.52
2	21/120=0.18	2*0.18=0.36
3	1/120=0.01	3*0.01=0.03
	$\sum$	0.91

E(x)=μ=0.91; es decir, en 100 veces se espera un 91 defectuosos.

Para calcular la desviación estándar y varianza, se toma la E(x) como la media; por tanto.

x_i-E(x)	**$(x_i-E(x))^2$**	**$P(x)*(x_i-E(x))^2$**
-0.91	0.8281	0.8281*0.29=0.2401
0.09	0.0081	0.0081*0.52=0.0042
1.09	1.1881	1.1881*0.18=0.2139
2.09	4.3681	4.3681*0.01=0.0437
S^2	$\sum$	0.5019
	s	**0.708**

Ejercicios.

1) Una caja contiene 6 billetes de $200.00, 3 de $500.00 y 1 de $1000.00. Determinar la esperanza matemática, al extraer al azar un billete. **S » 370.**

2) Un analista ha calculado los montos probables de ventas de una empresa, así como la confianza que tiene de que se presenten dichos montos. Determine el monto de ventas que puede esperar dicha empresa. **S » $789 600.00**

Monto (en miles de pesos)	680	750	820	950
Confianza (%)	17	28	45	10

3) Un agricultor ha estimado el tonelaje de maíz que espera cosechar de su cultivo, así como la probabilidad de que ocurra cada una de sus estimaciones. Determine el tonelaje más probable que el agricultor coseche de su tierra. **S » 1200**

4) La papelería de la WM adquiere cada año 2500 libretas. Si los precios por pieza, en cuatro años sucesivos fueron $14.80, $21.00, $27.00 y $25.00
a) ¿cuál es el precio promedio que ha pagado la papelería por libreta? **S » $21.95**
b) El CAE dispone de un partida fija de $40 000.00 para la compra anual de las libretas. ¿Cuál es el precio promedio que ha pagado en los mismos cuatro años?, y ¿cuánto es la ganancia o la perdida? **S » $54 875.00 y P=$14 875.00**

5) Un jugador lanza dos monedas, gana $800.00 si caen dos águilas, $500.00 si cae un águila, pero pierde $300.00 si no cae ninguna águila. Hallar la ganancia o la perdida. **S » G=$375.00**

6) Se ha determinado que el proyecto “A” tiene los siguientes resultados posibles, así como las probabilidades de que ocurran cada uno de ellos.

Resultado (en millones de pesos)	Ganar 50	Ganar 30	Ganar 10	Ganar 70
Probabilidad (%)	15	45	15	25

En tanto, que el proyecto “B” puede dar como resultado lo siguiente.

Resultado (en millones de pesos)	Ganar 90	Ganar 50	Ganar 20	Ganar 10	Ganar 70
Probabilidad (%)	10	25	15	15	19

Calcule la Esperanza Matemática de cada puno de los proyectos y recomiende el mejor. **S » A=$40 000 000.00; B=$3 930 000.00; por tanto, el mejor es el proyecto "A".**

RAP2. *Aplicar las distribuciones Binomial y de Poisson para predecir resultados en una población, en el contexto de la resolución de problemas.*

DISTRIBUCIÓN BINOMIAL

La distribución binomial fue planteada por el matemático suizo Jakob I. Bernoulli (1654-1705), es la más sencilla de todas las distribuciones, pues sólo estudia procesos en las cuales los resultados posibles son sólo dos: tienen probabilidades constantes, y son independientes entre sí.

$$P(x)=\frac{n!}{x!(n-x)!}p^{x}q^{n-x}.$$

En donde: **P(x)** es la probabilidad de que sucedan exactamente **x** éxitos, en un total de **n** intentos; **x** es el número de éxitos deseado; **n** es el número de veces que se realiza la operación; **p** es la probabilidad de obtener un éxito; **q** es la probabilidad de obtener un fracaso.

Ejemplos.

1) Una fábrica produce lapiceros con 2.5% de defectuosos. Si se toma una muestra de 200 lapiceros, ¿cuál es la probabilidad de encontrar 3 ó más defectuosos.

$$n=200;\quad p=2.5\%;\quad q=97.5\%;\quad x=3\ \acute{o}\ m\acute{a}s;\quad P(x)=1-P(0,1\ y\ 2);\quad P(x)=\frac{n!}{x!(n-x)!}p^{x}q^{n-x}.$$

$$P(0)=\frac{200!}{0!200!}(0.025)^{0}(0.975)^{200}=0.0060;\quad P(1)=\frac{200!}{1!199!}(0.025)^{1}(0.975)^{199}=0.0324;$$

$$P(2)=\frac{200!}{2!198!}(0.025)^{2}(0.975)^{198}=0.0827;\quad P(x)=1-0.1211;\quad P(x)=0.8789\ \acute{o}\ 87.89\%$$

2) ¿Cuál es la probabilidad de obtener 3 veces el número 5, en 10 lanzamientos de un dado de 6 caras?

$$n = 10; \quad p(5) = \frac{1}{6}; \quad q = \frac{5}{6}; \quad x = 3; \quad P(x) = \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x q^{n-x}.$$

$$P(3) = \frac{10!}{3!7!}(0.167)^3(0.833)^7 = 0.1550 \text{ ó } 15.50\%.$$

3) Un beisbolista tiene un promedio de bateo del 20%, ¿cuál es la probabilidad de que batee 2 hits en cinco turnos al bat?

$$n = 5; \quad p = 20\%; \quad q = 80\%; \quad x = 2; \quad P(x) = \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x q^{n-x}.$$

$$P(2) = \frac{5!}{2!3!}(0.20)^2(0.80)^3 = 0.2048 \text{ ó } 20.48\%.$$

4) El gerente de un supermercado garantiza que ninguna de sus cajas con 12 huevos contiene más de uno en mal estado, en caso contrario, él repondrá la docena y regalará la caja original al cliente. La probabilidad de que un huevo en particular este descompuesto es del 5%. ¿Cuál es la probabilidad de que el gerente tenga que reponer una caja de huevos?

$$n = 12; \quad p = 5\%; \quad q = 95\%; \quad x = más\ de\ 1; \quad P(x) = 1 - P(0\ y\ 1); \quad P(x) = \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x q^{n-x}.$$

$$P(0) = \frac{12!}{0!12!}(0.05)^0(0.95)^{12} = 0.5404; \quad P(1) = \frac{12!}{1!11!}(0.05)^1(0.95)^{11} = 0.3413;$$

$$P(x) = 1 - 0.8817; \quad P(x) = 0.1183 \text{ ó } 11.83\%$$

Ejercicios.

1) ¿Cuál es la probabilidad de obtener cuando mucho 3 veces el número 6, en 10 lanzamientos de un dado? $S \Rightarrow 93.02\%$

2) Un tirador bajo ciertas condiciones, sabe que la probabilidad de dar en el blanco al disparar su rifle es del 10%. Encontrar la probabilidad de dar en el blanco al menos una vez si se disparan 10 balas, considerando que los resultados son independientes. $S \Rightarrow 65.13\%$

3) Si el 60% de los autos del D. F. , producen exceso de gases en sus escapes, ¿qué probabilidad existe de que, al escoger 5 autos al azar, tengamos 3 que no producen exceso de gases? $S \Rightarrow 23.04\%$

4) En cierta área de la ciudad se da como razón del 75% de los rabos la necesidad de dinero para comprar drogas. Encuentre la probabilidad de que dentro de los 5 próximos asaltos reportados en esa área:
a) Exactamente 2 se debieron a la necesidad de dinero para comprar drogas. $S \Rightarrow 8.79\%$

b) Cuando mucho 3 se debieron a la misma razón. $S \Rightarrow 36.72\%$

5) Un agricultor que siembra fruta afirma que $\frac{2}{3}$ de su cosecha de duraznos se contaminó por la mosca del mediterráneo. Encuentre la probabilidad de que al inspeccionar cuatro duraznos:
a) Al menos uno esté contaminado por la mosca. $S \Rightarrow 98.77\%$
b) Cualquier cantidad entre 1 y 3 esté contaminado. $S \Rightarrow 79.02\%$

Media y Desviación Estándar de la Distribución Binomial, para una Población Infinita.

La media y la desviación de una distribución binomial son dos medidas de gran utilidad, sobre todo si se considera que una aplicación típica de la distribución binomial puede resolverse por medio de otra distribución más general; "La distribución normal". Las fórmulas que se utilizan, cuando la muestra proviene de una población infinita o cuando la muestra no excede del 5% de la población total, son:

$$Media = \mu = np \quad ; \quad En\ donde;\ n\ es\ el\ no.\ de\ eventos;\ p\ la\ probabilidad\ de\ éxito$$

$$\sigma = \sqrt{npq} \qquad\qquad y\ q\ la\ probabilidad\ de\ fracaso.$$

Ejemplos.

1) Determinar la media y la desviación estándar de la distribución del número de alfileres defectuosos que podría contener una muestra de 200 alfileres, si la fábrica tiene un % de defectuosos del 2.5%

$$n = 200; \quad p = 0.025; \quad \mu = np; \quad \mu = (200)(0.025) = 5$$

$$\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{(200)(0.025)(0.975)} = 2.208$$

2) Determine la media y desviación estándar de la distribución del número de veces que se puede obtener el número 3, en diez lanzamientos de un dado.

$$n = 10; \quad p = \frac{1}{6}; \quad \mu = np; \quad \mu = (10)(0.16666) = 1.667$$

$$\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{(10)(0.16667)(0.83333)} = 1.179$$

Media y Desviación Estándar de la Distribución Binomial, para una Población Finita.

Cuando el tamaño de la muestra excede del 5% de la población total. La media y la desviación estándar son:

$$Media = \mu = np \quad ; \quad En\ donde;\ Fc\ es\ un\ factor\ de\ corrección;\ N\ el\ tamaño\ de\ la\ población$$

$$\sigma = \sqrt{npq}(Fc) \quad ; \quad Fc = \sqrt{\frac{N-n}{N-1}} \qquad y\ n\ el\ tamaño\ de\ la\ muestra.$$

Ejemplos.

1) El 2.5% de alfileres de un paquete de 200 esta defectuoso. Determinar la media y la desviación estándar de la distribución de probabilidad que resulta al tomar 50 alfileres del paquete.

$$N = 200; \quad n = 50; \quad p = 0.025; \quad \mu = np; \quad \mu = (50)(0.025) = 1.25$$

$$Fc = \sqrt{\frac{200-50}{200-1}} = 0.868; \quad \sigma = \sqrt{npq}(Fc) = \sqrt{(50)(0.025)(0.975)}(0.868) = 0.958$$

2) Calcula la media y la desviación estándar de la distribución de probabilidad, dadas las siguientes condiciones: **a)** N=50 ; n=20 ; **b)** N=200 ; n=150 ; **c)** N=500 ; n=300

$$a) \quad N = 50; \quad n = 20; \quad p = 0.40; \quad \mu = np; \quad \mu = (20)(0.40) = 8$$

$$Fc = \sqrt{\frac{50-20}{50-1}} = 0.7825 \quad ; \quad \sigma = \sqrt{npq}(Fc) = \sqrt{(20)(0.40)(0.60)}(0.7825) = 1.714$$

$$b) \quad N = 200; \quad n = 150; \quad p = 0.75; \quad \mu = np; \quad \mu = (150)(0.75) = 112.5$$

$$Fc = \sqrt{\frac{200-150}{200-1}} = 0.5013 \quad ; \quad \sigma = \sqrt{npq}(Fc) = \sqrt{(150)(0.75)(0.25)}(0.5013) = 2.659$$

$$c) \quad N = 500; \quad n = 300; \quad p = 0.60; \quad \mu = np; \quad \mu = (300)(0.60) = 180$$

$$Fc = \sqrt{\frac{500-300}{500-1}} = 0.6331 \quad ; \quad \sigma = \sqrt{npq}(Fc) = \sqrt{(300)(0.60)(0.40)}(0.6331) = 5.372$$

Ejercicios.

1) Tabule la distribución de probabilidad del número de peces amarillos que resulta al tomar aleatoriamente una muestra de 6 peces de una pecera que contiene 200 peces amarillos y 300 rojos. Determine también la media y desviación estándar de la distribución de peces que resulta al tomar aleatoriamente 60 peces.
   a) 18 peces amarillos. $S \Rightarrow 8.44\%$
   b) 22 peces amarillos. $S \Rightarrow 7.69\%$

2) Calcula la media y la desviación estándar de la distribución de probabilidad, dadas las siguientes condiciones:

a) N=50 ; n=30 ; **b)** N=200 ; n=50 ; **c)** N=500 ; n=10

3) En base a la experiencia se sabe que el 2% de las llamadas que reciben en un conmutador son números equivocados. Determine la probabilidad de que 3 de 200 llamadas recibidas sean números equivocados. $S \Rightarrow 19.54\%$

DISTRIBUCIÓN DE POISSON

Esta distribución se ajusta perfectamente a las necesidades de calcular, por ejemplo; la probabilidad de que un día cualquiera se presenten más de un cierto número de reclamaciones por una póliza de seguros, o la probabilidad de que la demanda de servicios a la hora pico exceda la capacidad de los nuevos equipos, etc.

La distribución de Poisson puede también utilizarse para simplificar el cálculo que implica la distribución binomial, cuando **n** es grande y **np** pequeño, del orden de $np \langle 7$.

$$P(x) = \frac{\lambda^x}{x! e^{\lambda}}.$$

En donde; **x** es el número de éxitos, λ la frecuencia de ocurrencia de los eventos y **e** la base de los logaritmos neperianos (o naturales).

La μ y σ de la distribución de Poisson son útiles para convertir esta distribución en la binomial y/o la normal.

$$\mu = no.\ de\ veces\ que\ ocurre\ un\ evento\ "n".$$
$$\sigma = \sqrt{no.\ de\ veces\ que\ ocurre\ el\ evento.} = \sqrt{n}.$$

Ejemplos.

1) En un conmutador se tiene una demanda media de 4 llamadas por minuto, ¿calcular la probabilidad de que en un minuto se reciban más de una llamada?

$$\lambda = 4; \quad \mathrm{P}(\mathrm{x}) = \frac{\lambda^x}{x!e^\lambda}; \quad x = 0; \quad P(0) = \frac{4^0}{0!e^4}; \quad P(0) = 0.0183$$

$$x = 1; \quad P(1) = \frac{4^1}{1!e^4}; \quad P(1) = 0.0733$$

$$P(más\ de\ 1) = 1 - P(0\ y\ 1); \quad P(más\ de\ 1) = 1 - 0.0916; \quad P(más\ de\ 1) = 0.9084\ ó\ 90.84\%$$

2) Una fábrica produce folders con un promedio de defectuosos de 5 por paquete. Determine la media y desviación estándar de la distribución de probabilidad correspondiente.

$$\text{n=5}; \quad \mu = 5; \quad \sigma = \sqrt{5}; \quad \sigma = 2.236$$

3) En una carretera pasan en promedio 27 automóviles por hora.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que durante los próximos 30 minutos el número de autos sea de 12?

$$a) \quad \lambda = \frac{27}{2} = 13.5; \quad x = 12; \quad \mathrm{P}(\mathrm{x}) = \frac{\lambda^x}{x!e^\lambda};$$

$$P(12) = \frac{13.5^{12}}{12!e^{13.5}}; \quad P(12) = \frac{3.664419807\ x10^{13}}{3.493916082\ x10^{14}}; \quad P(12) = 0.1049\ ó\ 10.49\%$$

b) ¿Cuál es la probabilidad de que durante las próximas dos horas el número de autos sea de 48?

$b) \quad \lambda = 27(2) = 54; \quad x = 48; \quad \mathrm{P}(\mathrm{x}) = \dfrac{\lambda^x}{x!e^{\lambda}};$

$$P(48) = \frac{54^{48}}{48!e^{54}}; \quad P(48) = \frac{1.428566532\,x10^{83}}{3.514073256\,x10^{84}}; \quad P(48) = 0.0407\ ó\ 4.07\%$$

c) Determinar la media y la desviación estándar de la distribución de probabilidad resultante.

$$\mu = 27; \quad n=27; \quad \sigma = \sqrt{27}; \quad \sigma = 5.196$$

Ejercicios.

1) En una enorme pecera hay 4 peces amarillos por tonelada de agua. Determine la probabilidad de que, en una muestra aleatoria de 5 toneladas, haya exactamente.

c) 18 peces amarillos. $S \Rightarrow 8.44\%$

d) 22 peces amarillos. $S \Rightarrow 7.69\%$

2) En base a la experiencia se sabe que el 2% de las llamadas que reciben en un conmutador son números equivocados. Determine la probabilidad de que 3 de 200 llamadas recibidas sean números equivocados. $S \Rightarrow 19.54\%$

3) Una secretaria comete dos errores en promedio al escribir una página. Si los errores son independientes, ¿cuál es la probabilidad de que cometa uno ó más errores en la siguiente página que escriba? $S \Rightarrow 86.47\%$

4) Tabule la distribución de probabilidad del número de peces amarillos que resulte al tomar aleatoriamente una muestra de 6 peces de una pecera que contiene 200 peces amarillos y 300 rojos.

$$S \Rightarrow P(0) = 9.07\%; \quad P(1) = 21.77\%, \quad P(2) = 26.13\%; \quad P(3) = 20.90\%$$
$$P(4) = 12.54\%; \quad P(5) = 6.02\%\ y; \quad P(6) = 2.41\%$$

5) En una carretera pasan en promedio 27 automóviles por hora. Determine la probabilidad de que;

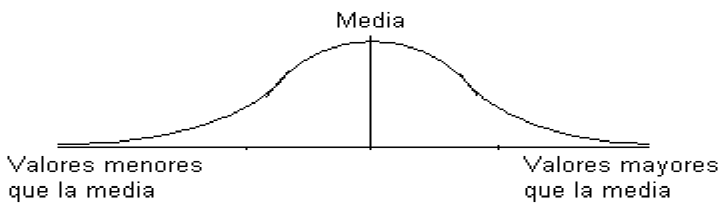
a) Durante los próximos 20 minutos el número de autos sea de 15. $S \Rightarrow 1.94\%$

b) Durante las próximas 3 horas el número de autos sea de 80? $S \Rightarrow 4.43\%$

RAP3. *Aplicar la distribución Normal para predecir resultados de una población, en el contexto de la resolución de problemas.*

DISTRIBUCIÓN NORMAL.

La distribución de probabilidad normal, es aquella en la cual, a partir de un punto central de máxima frecuencia (la media de la distribución), los valores mayores y menores que la media se distribuyen simétricamente a la derecha e izquierda, disminuyendo gradualmente hasta desaparecer.



Esta distribución es la más utilizada para variables aleatorias continuas, es decir, aquellas para las cuales es imposible enumerar todos los eventos posibles. Asimismo, esta distribución permite resolver en forma aproximada los problemas propios de las distribuciones Binomial y de Poisson, por lo que su importancia en Probabilidad y Estadística es fundamental.

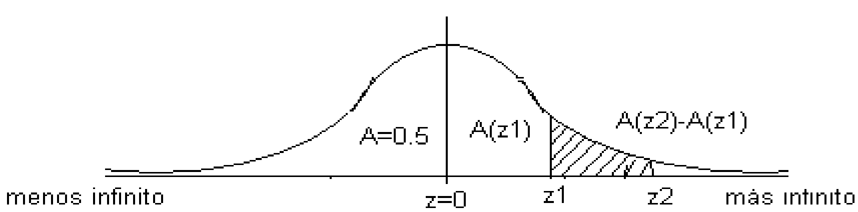
Propiedades.

1) Es simétrica en forma de campana.
2) La media, la mediana y la moda tienen el mismo valor, ubicado en el centro de la figura.
3) Teóricamente, la curva se extiende hasta el infinito en ambas direcciones, sin tocar nunca el eje horizontal.

• Área Bajo la Curva de la Distribución Normal.

La curva normal de cualquier distribución puede convertirse en una curva estandarizada, en la que el valor central es cero, la σ (desviación estándar) es uno, y el área desde - ∞ hasta + ∞ es el 100%.

$$z = \frac{x-\mu}{\sigma} = \frac{Valor\ menos\ la\,Media}{Desviación\ Es\tan dar}.$$



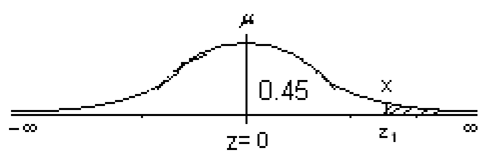
La altura de la curva normal estandarizada esta dada por la función.

$$f(x) = \frac{0.398942280400}{e^{0.5z^2}};$$

y su integración matemática entre dos puntos cualquiera, z_1 y z_2 produce el área o probabilidad de que una variable tenga valores entre z_1 y z_2. Por lo general, no es necesario realizar ninguna integración numérica para obtener el área bajo la curva normal estandarizada. Las tablas estadísticas están ya calculadas con esos valores.

Ejemplos.

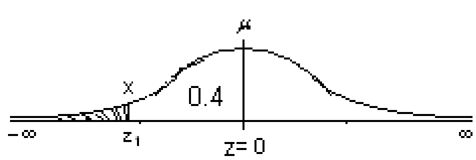
1) Al mover un vaso lleno de agua de un lugar a otro, se derrama en promedio 6.2 mm., con una desviación estándar de 0.8 mm. Sí se desea garantizar que, por lo menos, el 95% de las veces que se mueva el vaso no se derrame, ¿cuánto debe dejarse sin llenar?



$$A = 0.95 - .50; \quad A = 0.45 \Rightarrow z = 1.64;$$

$$z = \frac{x-\mu}{\sigma}; \quad x = z\sigma + \mu; \quad x = (1.64)(0.8) + 6.2; \quad x = 7.51\ mm.$$

2) Los salarios anuales de los ejecutivos de una compañía están distribuidos normalmente, con una desviación estándar de 1200 dólares. Se tiene programado un recorte de personal que implica el despido de aquellos que ganan menos de 18 000 dólares, si tal medida representa el 10% de éstos ejecutivos. ¿Cuál es actualmente el salario medio de este grupo de ejecutivos?

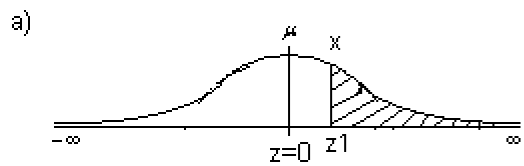


$$A = 0.50 - 0.10; \quad A = 0.40 \Rightarrow z = -1.28;$$

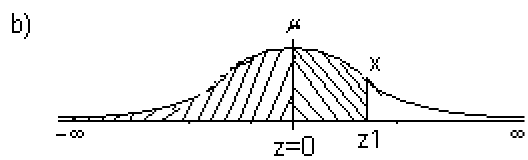
$$z = \frac{x-\mu}{\sigma}; \quad \mu = x - z\sigma; \quad \mu = 18000 - (-1.28)(1200); \quad \mu = 19536\ dolares.$$

3) La estatura promedio de los empleados de una empresa es de 1.65 m., con una desviación estándar de 6.2 cm. Suponga una distribución normal, determine que porcentaje de los empleados miden:

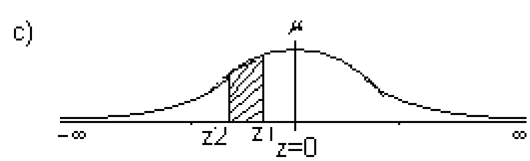
a) más de 1.7 m.
b) menos de 1.8 m.
c) entre 1.45 y 1.55 m.



$$z_1 = \frac{1.70 - 1.65}{0.062}; \quad z_1 = 0.81 \Rightarrow A_1 = 0.2910;$$
$$A = 0.5 - 0.2910; \quad \text{A} = 0.2090 \text{ ó } 20.90\%$$



$$z_1 = \frac{1.80 - 1.65}{0.062}; \quad z_1 = 2.42 \Rightarrow A_1 = 0.4922;$$
$$A = 0.5 + 0.4922; \quad \text{A} = 0.9922 \text{ ó } 99.22\%$$



$$z_1 = \frac{1.45 - 1.65}{0.062}; \quad z_1 = -3.23 \Rightarrow A_1 = 0.4994; \quad z_2 = \frac{1.55 - 1.65}{0.062}; \quad z_2 = -1.61 \Rightarrow A_2 = 0.4463$$
$$\therefore \quad A = A_1 - A_2; \quad A = 0.4994 - 0.4463; \quad \text{A} = 0.0531 \text{ ó A} = 5.31\%$$

Ejercicios.

1) Un automóvil consume 0.08 lts., de combustible por kilómetro y recorre diariamente una distancia promedio de 385 km., con una desviación estándar de 25 km. ¿Cuántos litros de combustible debe tener el tanque al iniciar el día, si se desea asegurar que al menos el 99.9% de los días no le falte combustible? ***S » 37 lts.***

2) La profesora de un grupo, dice a sus estudiantes que para estar entre el 10% superior de la clase, deben obtener la calificación MB en un examen. De acuerdo con su experiencia, la profesora estima que la media y desviación estándar en este examen serán 72 y 13, respectivamente. ¿Cuál será la calificación mínima necesaria para obtener MB? ***S » 88.64***

3) El coeficiente intelectual de los aspirantes aprobados para ingresar a la escuela Medico Militar tiene una distribución normal, una media de 100 y desviación estándar de 15. calcular la proporción de reclutas que tienen un coeficiente intelectual:

a) superior a 105.9 ***S » 34.83%***

b) entre 103 y 105 ***S » 5.00%***

c) inferior a 84.7 ***S » 15.39%***

4) Un investigador informa que las ratas viven en promedio 40 meses. Suponiendo que la vida de tales ratas este normalmente distribuido con una desviación estándar de 6.3 meses, encuentre la probabilidad de que una rata determinada viva:

a) más de 32 meses. ***S » 89.80%***

b) menos de 28 meses. ***S » 2.87%***

c) entre 37 y 49 meses. ***S » 60.80%***

5) La vida útil de una lámpara fluorescente utilizada en invernaderos está distribuida normalmente con una media de 600 hrs., y una desviación estándar de 2400 minutos. Determinar la probabilidad de que:

a) Una lámpara elegida al azar, tenga una vida útil entre 620 y 680 hrs. ***S » 28.57%***

b) Una lámpara dure más de 740 hrs. ***S » 0.02%***

6) El tiempo de espera **x** en cierto banco está distribuido en forma normal, aproximadamente, con una media y desviación estándar de 3.7 y 1.4 minutos respectivamente. Encuentre la probabilidad de que un cliente seleccionado aleatoriamente tenga que esperar:

a) 2 minutos. ***S »11.31%***

b) Más de 6 minutos. ***S » 5.05%***

c) Obtenga el valor del 75 centil para **x**. ***S » 4.64%***

7) Una unidad de radar es utilizada para medir la velocidad de los automóviles en una vía rápida durante la hora de mayor congestionamiento. La velocidad de los automóviles está distribuida normalmente con una media de 62 millas/hora.

a) Encuentre la desviación de todos los automóviles si el 3% de ellos viaja a velocidades superiores a 72 millas/horas. ***S » 5.32%***

b) Con la desviación estándar del inciso **a)**, obtenga el porcentaje de esos vehículos que viajan a menos de 55 millas/hora. ***S » 9.34%***

c) Con la desviación estándar del inciso **a)**, halle el 95 centil para la variable velocidad. ***S » 7 0.723***

8) Considerando los valores del coeficiente de inteligencia (C. I. ó C. Q.) (Intelligence Quotient) en seres humanos. Los C. I. están distribuidos normalmente con una media de 100 y una desviación estándar de 10. Si una persona es elegida al azar.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que su C. I. esté entre 105 y 115? ***S »24.17%***

b) ¿Qué su C. I. sea mayor que 95? ***S » 69.15%***

c) Obtener el 33 percentil de los puntajes de C. I. ***S » 95.60***

• Relación entre las Distribuciones Binomial y Normal.

Si **"n"** es muy grande y ni **"p"** ni **"q"** están muy próximos a cero, la distribución binomial puede aproximarse estrechamente a la distribución normal con variable tipificada dada por $z = \frac{x - np}{\sqrt{npq}}$.

En donde; **"x"** es la variable aleatoria que da el número de éxitos en **"n"** pruebas de Bernoulli y **"p"** es la probabilidad de éxitos.

La aproximación es tanto mejor conforme aumenta **"n"**, y el límite es total. En la práctica la aproximación es muy buena si ambos **"np"** y **"nq"** son superiores a **5.** Es decir; $np \geq 5 \quad y \quad nq \geq 5$.

Dado que la distribución binomial es discreta (sólo acepta valores enteros), mientras que la distribución normal es continua (acepta cualquier valor), la variable normalizada **"z"** debe calcularse incluyendo un ajuste por continuidad.

$$z = \frac{x - \mu \pm 0.5}{\sigma};$$

$+0.5$ *es, si la expresión buscada es del tipo "menor o igual que" o "mayor que";*

o -0.5 *es si la expresión buscada es del tipo "mayor o igual que" o "menor que".*

Ejemplos.

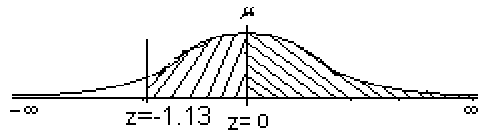
1) Una fábrica produce alfileres con 2.5% de defectuosos. Si se toma una muestra de 200 alfileres, ¿cuál es la probabilidad de encontrar 3 o más defectuosos?

$$n = 200; \quad p = 2.5\% \quad \therefore \quad q = 97.5\%; \quad np = (200)(0.025) = 5;$$

$$nq = (200)(0.975) = 195; \quad np \geq 5; \; nq \geq 5; \quad Si\ cumplen \quad \therefore \quad \mu = 5;$$

$$\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{(200)(0.025)(0.975)} = 2.208; \quad decir\ 3\ o\ más\ significa\ más\ de\ 2$$

$$por\ lo\ tanto. \quad z = \frac{2 - 5 + 0.5}{2.208} = -1.13; \quad A = 0.5 + 0.3708 = 0.8708 \quad ó \quad 87.08\%$$



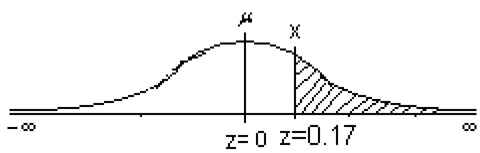
2) Un inspector de calidad toma una muestra de 150 artículos de una producción que tiene el 6% de algún defecto. Determine la probabilidad de que la muestra contenga más de 10 artículos que tengan algún defecto.

$$n = 150; \quad p = 6\% \quad \therefore \quad q = 94\%; \quad np = (150)(0.06) = 9;$$

$$nq = (150)(0.94) = 141; \quad np \geq 5; nq \geq 5; \quad Si\ cumplen \quad \therefore \quad \mu = 9;$$

$$\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{(150)(0.06)(0.94)} = 2.909. \quad x = más\ de\ 10$$

$$por\ lo\ tanto. \quad z = \frac{10 - 9 - 0.5}{2.909} = 0.17; \quad A = 0.4325 \quad ó \quad 43.25\%$$



La Distribución Normal como Aproximación a la de Poisson. Esta distribución, puede simplificarse por medio de la distribución normal si se cumple que la media sea mayor de 10.

En tanto que la media y la desviación estándar son: μ=n; σ= $\sqrt{\mu}$.

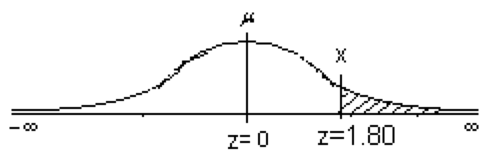
En donde; **"n"** es número de veces que ocurre el evento. Dado que la distribución de Poisson es discreta (sólo acepta valores enteros), mientras que la distribución normal es continua (acepta cualquier valor). La variable normalizada debe calcularse incluyendo un ajuste por continuidad equivalente a +0.5 si la expresión buscada es del tipo "menor o igual que" o "mayor que", o -05 si la expresión buscada es del tipo "mayor o igual que" o "menor que".

Ejemplo. Cierta región sufre un promedio de 65 accidentes por año. Determine la probabilidad de que, en un año cualquiera, ocurran:

a) más de 80 accidentes.
b) Menos de 45 accidentes.
c) Entre 50 y 70 accidentes.

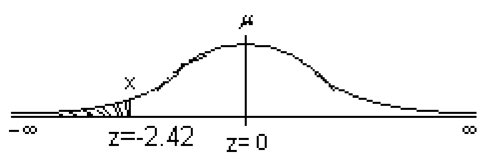
$$a)\quad x = \text{más de } 80; \quad \mu = 65; \quad \sigma = \sqrt{65} = 8.062. \quad z = \frac{x - \mu \pm 0.5}{\sigma}$$

$$\text{por lo tanto.} \quad z = \frac{80 - 65 - 0.5}{8.062} = 1.80; \quad A = 0.4641 \quad \therefore \quad 0.5 - 0.4641 = 0.0359 \quad o \quad 3.59\%$$



$$b)\quad x = \text{menos de } 45; \quad \mu = 65; \quad \sigma = \sqrt{65} = 8.062. \quad z = \frac{x - \mu \pm 0.5}{\sigma}$$

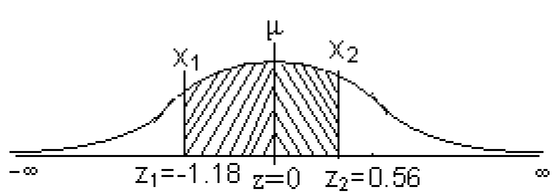
$$\text{por lo tanto.} \quad z = \frac{45 - 65 + 0.5}{8.062} = -2.42; \quad A = 0.4922 \quad \therefore \quad 0.5 - 0.4922 = 0.0078 \quad o \quad 0.78\%$$



$$c)\quad x = \text{entre } 55 \text{ y } 70; \quad \mu = 65; \quad \sigma = \sqrt{65} = 8.062. \quad z = \frac{x - \mu \pm 0.5}{\sigma}; \quad \text{por lo tanto} \quad z = \frac{55 - 65 + 0.5}{8.062}$$

$$z = -1.18; \quad A = 0.3810; \quad z = \frac{70 - 65 - 0.5}{8.062} = 0.56; \quad A = 0.2123; \quad \text{es decir} \quad A = 0.3810 + 0.2123$$

$$A = 0.5933 \quad ó \quad 59.33\%$$



Ejercicios.

1) Un auditor escoge al azar 200 cuentas de un banco que tiene 4% de clientes morosos. Determine, la probabilidad de que el auditor encuentre 5 o más clientes morosos. ***S » 89.62%***

2) En una carretera pasan en promedio 27 automóviles por hora. Determinar la probabilidad de que circulen más de 17 autos por hora. ***S » 96.64%***

3) Un empleado bancario atiende en promedio 8 clientes por hora. Calcule la probabilidad de que el empleado atienda menos de 10 clientes por hora. *S » 70.19%*

BIBLIOGRAFÍA

1. Johnson, Robert. Estadística Elemental. Iberoamérica. Ed. 1990, México.
2. Hoel, Paul G. Estadística Elemental. CECSA Ed. 1973, México.
3. Freud, John E. Estadística. PRENTICE HALL 4a Ed. 1993, México.
4. Willougaby, Stepher Probabilidad y Estadística Publicaciones Cultural S. A. 1a Ed. 1978, México.
5. Hernández Lerma, Enésimo. Elementos de Probabilidad y Estadística. Ed. Fondo de Cultura económica.
6. Seymour Lipschutz, Ph. D. PROBABILIDAD. Serie de Compendios Schaum. Profesor Asociado de Matemáticas, Universidad de Temple.
7. Octavio Sánchez. Probabilidad y Estadística. McGraw-Hill. Interamericana 2ª Ed. 2004, México.