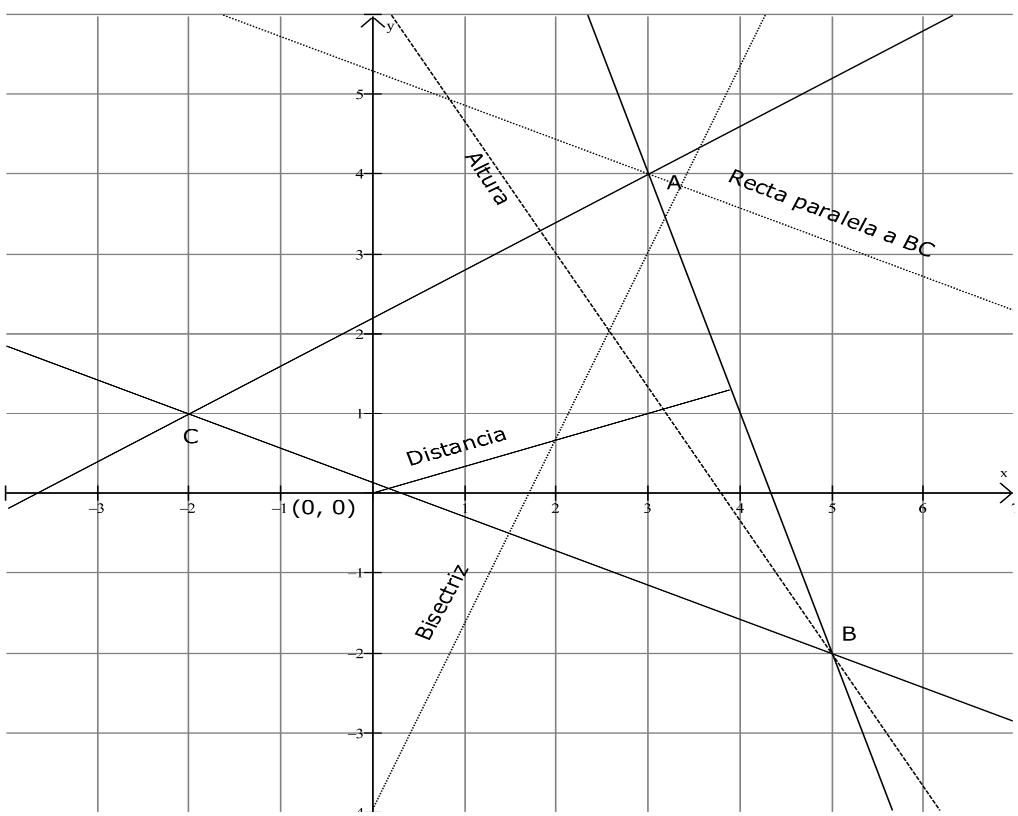
GEOMETRÍA ANALÍTICA 2011



La unidad de Aprendizaje Geometría Analítica pertenece al área de formación Científica, Humanística y Tecnológica Básica del Bachillerato Tecnológico perteneciente al Nivel Medio Superior del Instituto Politécnico Nacional. Se ubica en el tercer nivel de complejidad del plan de estudios y se imparte de manera obligatoria en el tercer semestre correspondiente a las ramas del conocimiento; Ciencias Físico-Matemático, Ciencias Sociales y Administrativas y Ciencias Médico-Biológicas.

Competencia General. Resuelve problemas referentes a lugares geométricos y sus respectivas ecuaciones, utilizando los diferentes sistemas de coordenadas, en situaciones académicas y sociales.

Unidad 1. Conceptos Básicos de la Geometría Analítica y La Línea Recta.

Muchos teoremas de la geometría plana pueden probarse con mayor facilidad mediante métodos analíticos. Es decir, pueden demostrarse colocando la figura en el plano de coordenadas y utilizando el álgebra para expresar y sacar conclusiones acerca de las relaciones geométricas. El estudio de la geometría a partir de la perspectiva algebraica recibe el nombre de Geometría Analítica.

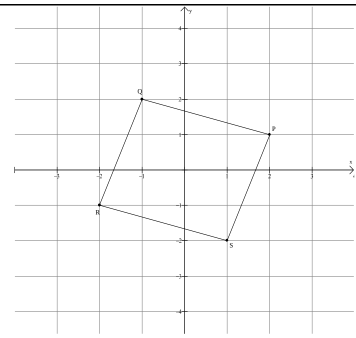
Competencia Particular. Resuelve problemas de lugares geométricos, en particular de la línea recta, empleando las propiedades del plano cartesiano en situaciones académicas y sociales.

RAP 1. Describe lugares geométricos mediante la localización de puntos en el plano cartesiano.

1.1 Sistema Cartesiano. La localización de un punto por medio de sus coordenadas, se llama trazado de un punto. Se anota la abscisa en primer lugar y la ordenada en segundo, por esta razón un para de coordenadas en el plano se llama un par ordenado de números **(x, y).**

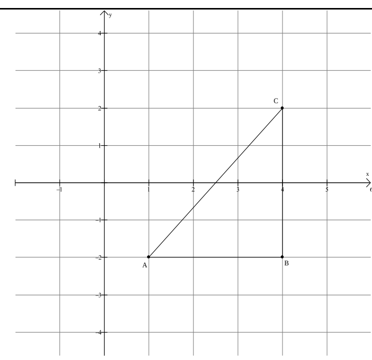
Ejemplos. Trazar en el plano cartesiano los siguientes puntos.

1) P (2,1); Q (-1,2); R (-2,-1) y S (1,-2) y une los puntos indicados, ¿qué figura representa?



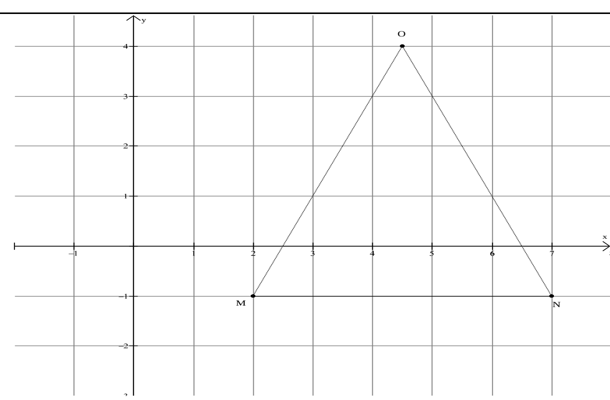
Un cuadrado

2) A (1,-2); B (4,-2) y C (4,2); une los puntos ABC e indica que figura representa.



Un triángulo rectángulo

3) M (2,-1) y N (7,-1); si M y N son los vértices de un triángulo isósceles, ¿cuáles serán las coordenadas del punto O?



Las coordenadas del punto O es (9/2, 4)

1.2 Distancia Entre Dos Puntos. La distancia **"d"** entre dos puntos $P_1\left(x_1, y_1\right)$ y $P_2\left(x_2, y_2\right)$ esta dada por la fórmula. $d=\sqrt{\left(x_2-x_1\right)^2+\left(y_2-y_1\right)^2}$.

Ejemplos.

1) Calcular la distancia entre los puntos P (6,3) y Q (-6,-2) y ubicarlos en el sistema cartesiano.

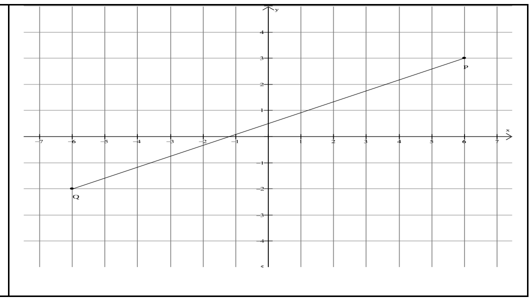
Planteamiento:

$$d=\sqrt{\left(x_2-x_1\right)^2+\left(y_2-y_1\right)^2}.$$

Desarrollo:

$$d=\sqrt{\left(6-(-6)\right)^2+\left(3-(-2)\right)^2}=\sqrt{12^2+5^2}$$

$$d=\sqrt{144+25}=\sqrt{169}=13\ u.$$



2) Uno de los extremos de un segmento rectilíneo de longitud 5, es el punto (3, -2). Si la abscisa del otro extremo es 6, ¿cuál será su ordenada?

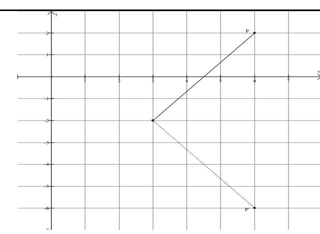
Planteamiento:

$$d=\sqrt{\left(x_2-x_1\right)^2+\left(y_2-y_1\right)^2}.$$

Desarrollo:

$$5^2=\left(6-3\right)^2+\left(y-(-2)\right)^2;\ \left(y+2\right)^2=25-9;$$

$$y=\sqrt{16}-2;\ y_1=-6\ u.\quad y_2=2\ u.$$



3) Hallar la distancia entre los puntos P (-5,6); Q (3.-7) y R (-8,-12), e indicar la figura plana que representa.

Planteamiento:

$$d=\sqrt{\left(x_2-x_1\right)^2+\left(y_2-y_1\right)^2};$$

Desarrollo:

$$\overline{RP}=\sqrt{\left(-5-(-8)\right)^2+\left(6-(-12)\right)^2}$$

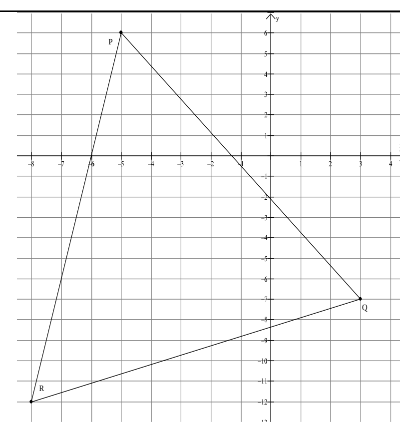
$$\overline{RP}=\sqrt{3^2+18^2}=\sqrt{9+324}=\sqrt{333}=18.248\ u$$

$$\overline{RQ}=\sqrt{\left(3-(-8)\right)^2+\left(-7-(-12)\right)^2}$$

$$\overline{RQ}=\sqrt{11^2+5^2}=\sqrt{121+25}=\sqrt{146}=12.083\ u$$

$$\overline{PQ}=\sqrt{\left(3-(-5)\right)^2+\left(-7-6\right)^2}$$

$$\overline{PQ}=\sqrt{8^2+\left(-13\right)^2}=\sqrt{64+169}=\sqrt{233}=15.264\ u$$



La figura plana es un triángulo

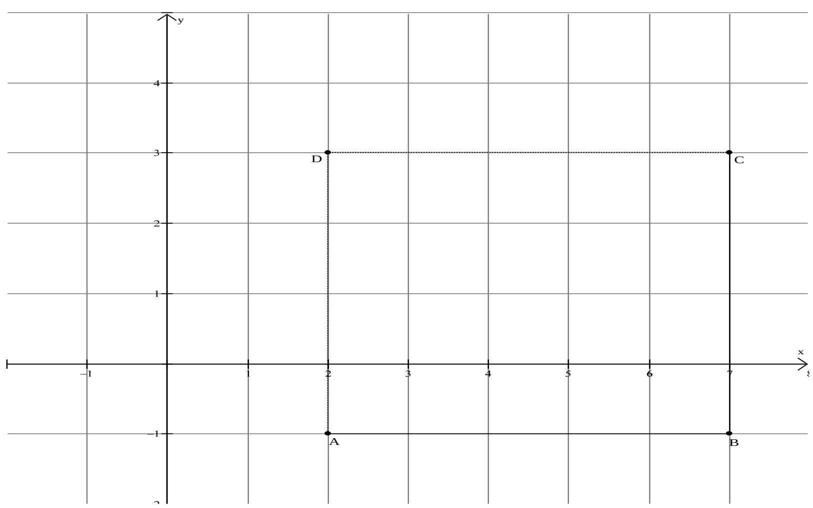
1.3 Perímetros y áreas de figuras rectangulares.

Perímetro. p=a+b+c+…..

A = 1/2(∑Prod. De Diag. Hacía abajo-∑Prod. De Diag. Hacía arriba). De las coordenadas de los puntos, como se muestra en el ejemplo.

Ejemplos.

1) Tres vértices de un rectángulo son los puntos A (2,-1); B (7,-1) y C (7,3). Hallar el cuarto vértice D, el perímetro y el área de la figura.



Planteamiento:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

p=a+b+c+…..

A = 1/2(∑Producto de las diagonales hacía abajo menos la ∑Producto de las Diagonales hacía arriba).

Desarrollo:

$a = \overline{AB} = 5;\ b = \overline{BC} = 4;$

$c = \overline{CD} = 5;\ d = \overline{DA} = 4.$

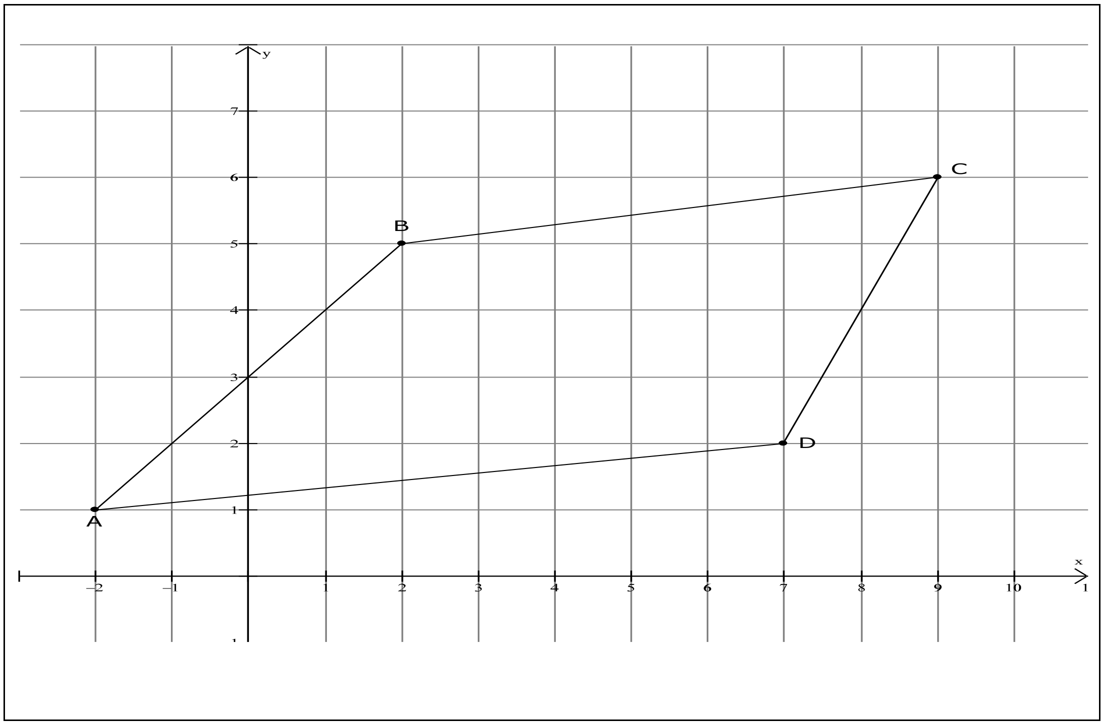
$p = 5 + 4 + 5 + 4 = 18\ u.$

$$2A = \begin{vmatrix} 2 & 7 & 7 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 3 & 3 & -1 \end{vmatrix}$$

$$2A = \left[(-2 + 21 + 21 - 2) - (-7 - 7 + 6 + 6)\right]$$

$$2A = \left[38 - (-2)\right] \quad A = \frac{40}{2} = 20\ u^2.$$

2) Los vértices de un cuadrilátero son: **A (-2, 1), B (2, 5), C (9, 6) y D (7, 2).** Determinar, el perímetro y el área.



Planteamiento:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

p=a+b+c+…..

A = 1/2(∑Producto de las diagonales hacía abajo menos la ∑Producto de las Diagonales hacía arriba).

Desarrollo:

$$\overline{AB} = \sqrt{(2-(-2))^2 + (5-1)^2} = \sqrt{4^2 + 4^2}$$

$$\overline{AB} = \sqrt{16+16} = \sqrt{32} = 5.657\ u.$$

$$\overline{AD} = \sqrt{(7-(-2))^2 + (2-1)^2} = \sqrt{9^2 + 1^2} = \sqrt{81+1}$$

$$\overline{AD} = \sqrt{82} = 9.055\ u.$$

$$\overline{BC} = \sqrt{(9-2)^2 + (6-5)^2} = \sqrt{7^2 + 1^2} = \sqrt{49+1}$$

$$\overline{BC} = \sqrt{50} = 7.071\ u.$$

$$\overline{DC} = \sqrt{(9-7)^2 + (6-2)^2} = \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{4+16}$$

$$\overline{DC} = \sqrt{20} = 4.742\ u.$$

$$p = 5.657 + 9.055 + 7.071 + 4.742 = 26.255\ u.$$

$$2A = \begin{vmatrix} -2 & 7 & 9 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & 6 & 5 & 1 \end{vmatrix}$$

$$2A = [-4 + 42 + 45 + 2 - (7 + 18 + 12 - 10)]$$

$$2A = [85 - (27)] \quad A = \frac{58}{2} = 29\ u^2.$$

1.4 División de un Segmento en una Razón Dada. Si $P_1(x_1, x_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ son los extremos de un segmento $\overline{P_1P_2}$, las coordenadas (x, y) de un punto P que divide a este segmento en una razón dada $r = \overline{P_1P} : \overline{PP_2}$ son: $r = \dfrac{x - x_1}{x_2 - x} = \dfrac{\overline{P_1P}}{\overline{PP_2}}$; $r = \dfrac{y - y_1}{y_2 - y} = \dfrac{\overline{P_1P}}{\overline{PP_2}}$.

Las coordenadas del punto medio de un segmento dirigido cuyos puntos extremos sean $P_1(x_1, x_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ son: $x = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$ y $y = \dfrac{y_1 + y_2}{2}$.

Ejemplos.

1) Si el punto **A (-4, 2)** y **B (4, 6)** son los puntos extremos de un segmento dirigido $\overline{AB}$, hallar las coordenadas del punto **P** que divide a este segmento en la razón $\overline{P_1P} : \overline{PP_2} = -3$.

Planteamiento:

$r = \overline{P_1P} : \overline{PP_2} = -3$; $r = \dfrac{x - x_1}{x_2 - x}$

$r = \dfrac{y - y_1}{y_2 - y}$

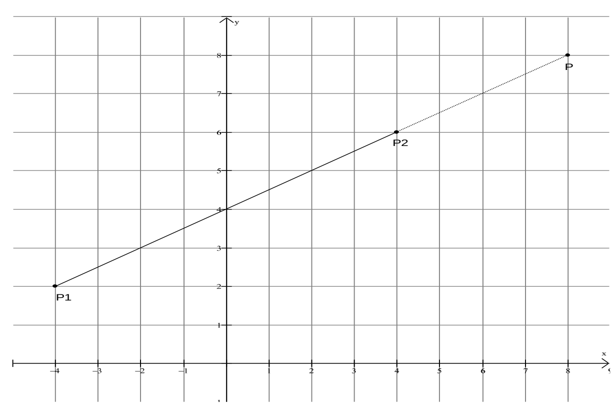
Desarrollo:

$-3 = \dfrac{x - (-4)}{4 - x}$; $-12 + 3x = x + 4$;

$2x = 16$; $x = 8$

$-3 = \dfrac{y - 2}{6 - y}$; $-18 + 3y = y - 2$;

$2y = 16$; $y = 8$



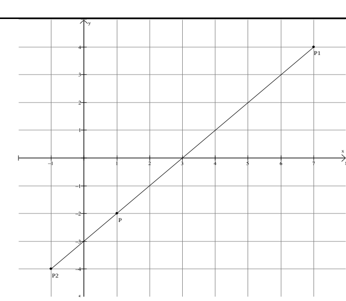
2) Los extremos de un segmento son los puntos **P (7, 4)** y **Q (-1, -4).** Hallar la razón $\overline{P_1P} : \overline{PP_2}$ en el punto **P (1, -2)** que divide al segmento.

Planteamiento:

$r = \overline{P_1P} : \overline{PP_2}$; $r = \dfrac{x - x_1}{x_2 - x}$ $\quad r = \dfrac{y - y_1}{y_2 - y}$

Desarrollo:

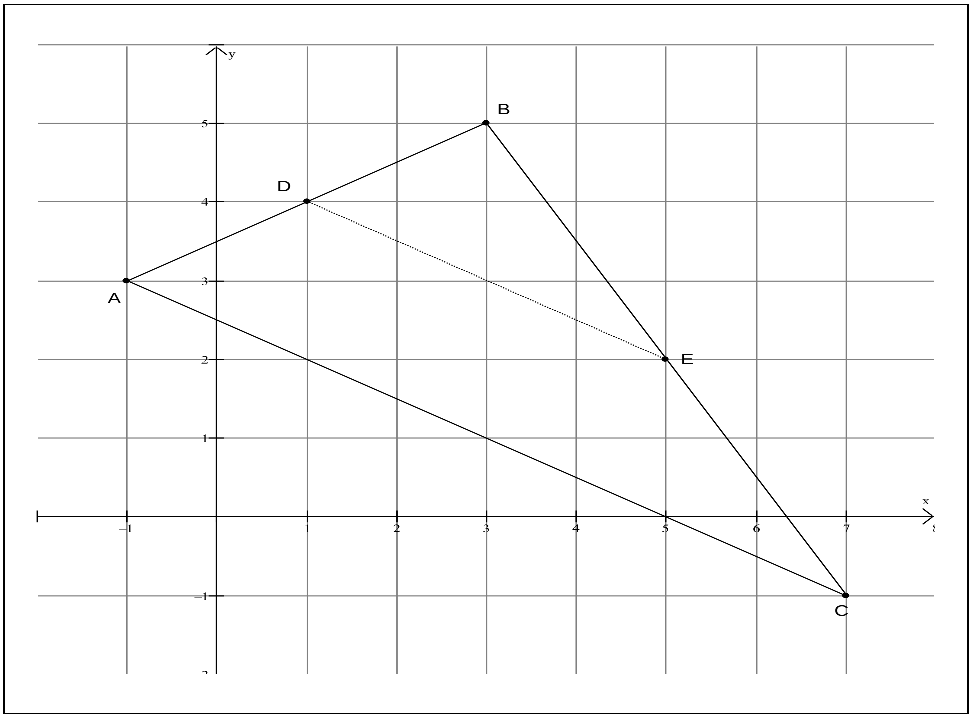
$r = \dfrac{1 - 7}{-1 - 1} = \dfrac{-6}{-2} = 3$ y $r = \dfrac{-2 - 4}{-4 - (-2)} = \dfrac{-6}{-2} = 3$.



1.5 Aplicaciones.

Ejemplos.

1) Los vértices de un triángulo son; **A (-1, 3), B (3, 5)** y **C (7, -1)**. Si **D** es el punto medio del lado $\overline{AB}$ y **E** del lado $\overline{BC}$, demostrar que la longitud del segmento $\overline{DE}$ es la mitad de la longitud del lado $\overline{AC}$.



Planteamiento:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}; \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2} \text{ y } d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

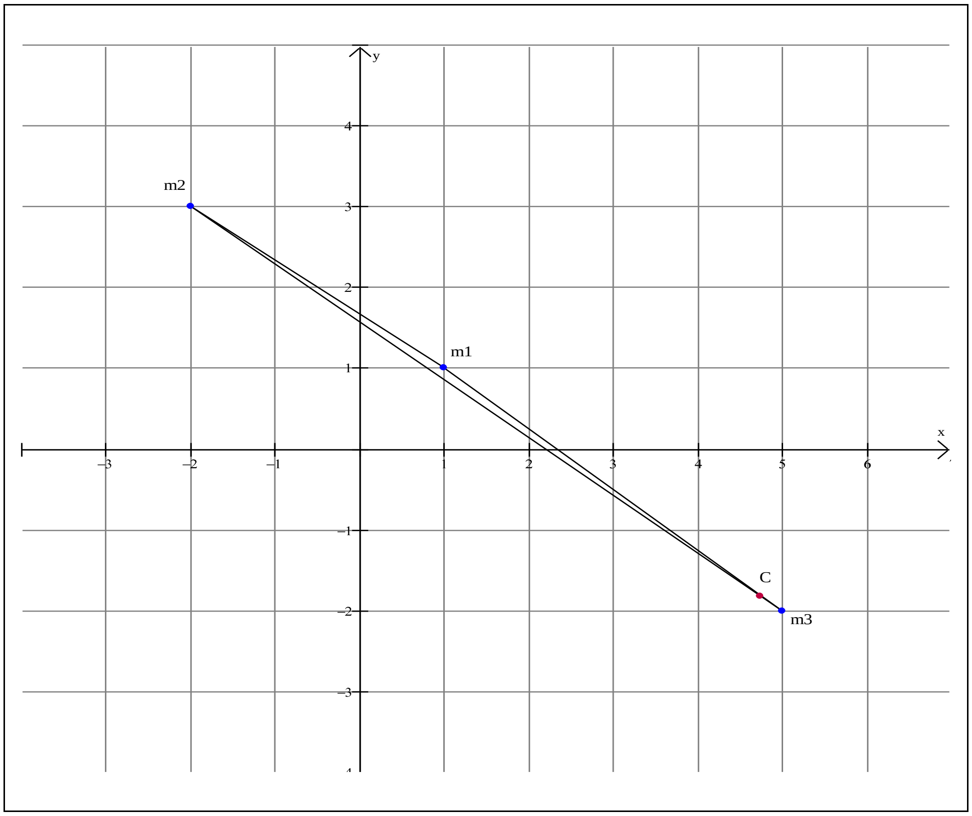
Desarrollo: $x_D = \frac{3 + (-1)}{2} = \frac{2}{2} = 1$; $y_D = \frac{5 + 3}{2} = \frac{8}{2} = 4$; $x_E = \frac{3 + 7}{2} = \frac{10}{2} = 5$ y

$y_E = \frac{5 + (-1)}{2} = \frac{4}{2} = 2$.

$$\overline{DE} = \sqrt{(5 - 1)^2 + (2 - 4)^2} = \sqrt{4^2 + (-2)^2} = \sqrt{16 + 4} = \sqrt{20} = 4.472\ u.$$

$$2\overline{AC} = \sqrt{(7 - (-1))^2 + (-1 - 3)^2} = \sqrt{8^2 + 4^2} = \sqrt{64 + 16} = \sqrt{80}; \quad \overline{AC} = 4.472\ u.$$

2) Tres moléculas con pesos de 18, 25 y 34 moles se ubican en los puntos **(1, 1), (-2, 3)** y **(5, -2)**, respectivamente. Determinar su centro de gravedad.



Planteamiento:

$M=\dfrac{m_1+m_2+m_3}{3}$; $r=\dfrac{\overline{M_2P}}{\overline{PM_3}}$; $r=\dfrac{x-x_1}{x_2-x}$ y $r=\dfrac{y-y_1}{y_2-y}$

Desarrollo: $M=\dfrac{18+25+34}{3}=\dfrac{77}{3}$;

$$\frac{77}{3}=\frac{x-(-2)}{5-x};\ 385-77x=3x+6;\ 80x=379;\ x=4.738\ u.$$

$$\frac{77}{3}=\frac{y-3}{-2-y};\ -154-77y=3y-9;\ 80y=-145;\ y=-1.813\ u.$$

Ejercicios. Trace en el plano coordenado los siguientes puntos.

1) P (-3,-2); Q (2,1); R (-7,-1) e indique en que cuadrante se encuentran.
Sol. » P en el 3º; Q en el 1ª y R en el 3ª.

2) A (-5,0); B (0,2) y C (0,-2) y; une los puntos indicados, ¿qué figura representa? **Sol. » Un triángulo.**

3) A (0,0); B (3,4); C (8,4) y D (5,0) y; une los puntos indicados, ¿qué figura representa? **Sol. » Un paralelogramo.**

4) Si P (1,1) y Q (3,5), son los vértices de un paralelogramo y que R tiene como abscisa 11, ¿Cuáles serán las coordenadas del punto S (?,?) y la ordenada de R? **Sol. » S (9, 1) y R (11, 5).**

5) Si A (-2,-1) y C (5,-2), son los vértices de un triángulo isósceles, ¿cuáles serán las coordenadas del vértice B? **Sol. » Todos los puntos que conforman la mediatriz del segmento AB excepto el punto medio de dicho segmento.**

6) Encuentre la distancia entre los puntos A (-5,3) y B (2,-7) y ubícalos en el sistema cartesiano. **Sol. » AB =12.207 u.**

7) Demostrar que los puntos A (-5,0); B (0,2) y C (0,-2), son los vértices de un triángulo isósceles y calcular el perímetro y el área. **Sol. » AB = 5.385 u; AC = 5.385 u; CB = 4; p=14.770 u y A=10 u^2.**

8) Demostrar que los puntos A (0,0); B (3,4); C (8,4) y D (5,0), son los vértices de un rombo y, calcular el perímetro y el área.
Sol. » AB =5 u; BC = 5 u; DC = 5 u; AD = 5 u; p=20 u y A=20 u^2.

9) Hallar el perímetro y el área del cuadrilátero cuyos vértices son; P (-3,-1); R (0,3); S (3,4) y T (4,-1). **Sol. » p =20.261 u y A=22 u^2.**

10) Los puntos extremos de un segmento es el punto A (2,4) y B (8,4). Hallar el punto P que divide a este segmento en dos partes tales que BP : PA es igual -2. **Sol. » P (-4, 12).**

11) Una circunferencia tiene como diámetro al segmento con extremos **P (-3,4)** y **Q (5,-2)**. Encuentra las coordenadas del centro y el radio.
Sol. » C (1, 1) y r =5 u.

12) Uno de los extremos de un segmento es el punto **P (7, 8)** y su punto medio **M (4, 3)**. Hallar las coordenadas del otro extremo **Q**. **Sol. » Q (1, -2).**

13) Los puntos medios de los lados de un triangulo son **D (2, 5), E (4, 2)** y **F (1, 1)**. Hallar las coordenadas de los tres vértices.
Sol. » A (-1, 4), B (3, -2) y C (5, 6).

14) Dado los puntos **R (-3, -4)** y **S (5, 2)**, determina las coordenadas de los puntos que divide al segmento en las razones; $-\frac{2}{3}, -\frac{3}{2}\ y\ \frac{3}{4}$; respectivamente.

Sol. » P_1 (21, 14), P_2 (-19, -16) y P_3 ($\frac{11}{3}, -\frac{4}{7}$).

15) Considera los puntos **P (5, 2), Q (6, 4)** y **R (3, -2)**. ¿En qué razón divide el punto **R** al segmento $\overline{PQ}$ y el segmento $\overline{QP}$?

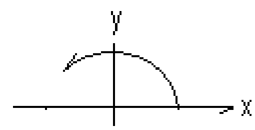
Sol. » $r = -\frac{2}{3}\ y\ r = -\frac{3}{2}$.

RAP 2. Manipula los elementos de la ecuación de la línea recta en sus diferentes expresiones.

1.6 La Recta.

Una línea recta analíticamente, es una ecuación lineal o de primer grado en dos variables. Una recta queda determinada completamente si se conocen dos condiciones, por ejemplo, dos de sus puntos, un punto y su dirección (pendiente o coeficiente angular).

1.6.1 Punto Pendiente. Es de la forma: $y - y_1 = m(x - x_1)$
$m = tg\theta.$ $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1};$ $x_2 \neq x_1.$ En donde; **m** es la pendiente de la recta y θ el ángulo de inclinación.



Ejemplos.

1) Hallar la pendiente y el ángulo de inclinación de la recta que pasa por los puntos (1, 6) y (5, -2).

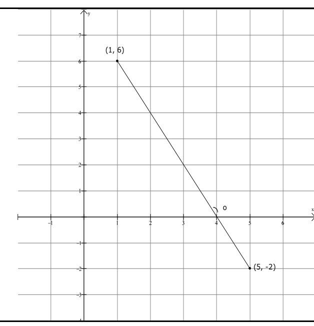
Planteamiento:

$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1};$ $m = tg\theta$

Desarrollo:

$m = \frac{(6 - (-2))}{(1 - 5)};$ $m = \frac{8}{-4};$ $m = -2$

$tg\theta = -2;$ $\theta = tg^{-1}(-2);$ $\theta = 116°33'54''$



2) Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto **(4, -1)** y tiene un ángulo de inclinación de 135°.

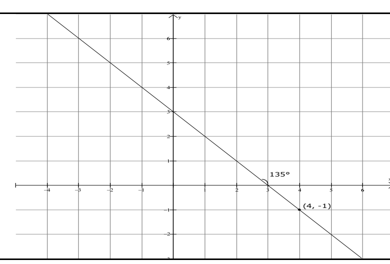
Planteamiento:

$y - y_1 = m(x - x_1);$ $m = tg\theta$

Desarrollo:

$m = tg\ 135°;$ $m = -1;$ $y - (-1) = -1(x - 4);$

$y = -x + 4 - 1;$ $y = -x + 3.$ *ecuación de la recta.*



3) Los vértices de un triángulo son los puntos A (2, -2); B (-1, 4) y; C (4, 5). Calcular los ángulos de inclinación de los lados del Δ ABC, el perímetro y el área.

Planteamiento:

$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1};\quad m=tg\theta;$

$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

$p=a+b+c+\ldots$

A = 1/2(?Prod. De Diag. Hacía abajo - Prod. De Diag. Hacía arriba).

Desarrollo:

$m_{AC}=\frac{(5-(-2))}{(4-2)};\quad m_{AC}=\frac{7}{2};\quad m_{AC}=3.5$

$m_{AB}=\frac{(4-(-2))}{(-1-2)};\quad m_{AB}=\frac{6}{-3};\quad m_{AB}=-2$

$m_{BC}=\frac{(5-4)}{(4-(-1))};\quad m_{BC}=\frac{1}{5};\quad m_{BC}=0.2$

$tg\theta_1=3.5;\quad \theta_1=tg^{-1}(3.5);$

$\theta_1=74°03'17''$

$tg\theta_2=-2;\quad \theta_2=tg^{-1}(-2);$

$\theta_2=116°33'54''$

$tg\theta_3=0.2;\quad \theta_3=tg^{-1}(0.2);$

$\theta_3=11°18'36''$

$\overline{BC}=\sqrt{(4-(-1))^2+(5-4)^2}$

$\overline{BC}=\sqrt{5^2+1^2}=\sqrt{26}=5.099\ u.$

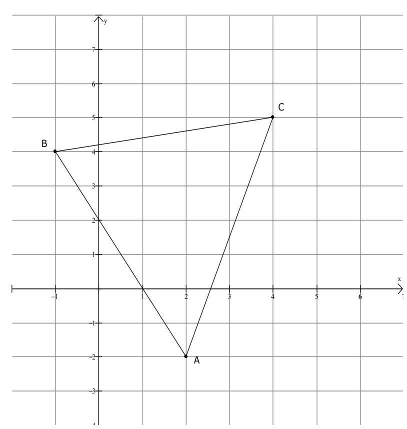
$\overline{AC}=\sqrt{7^2+2^2}=7.280\ u.$

$\overline{AB}=\sqrt{9+36}=6.708\ u.$

$p=5.099+7.280+6.708=19.087\ u.$

$A=\frac{1}{2-28}\left[(8-5-8)-(0+16+2)\right]$

$A=\frac{(-5-28)}{2}=\frac{-33}{2}=16.5\ u^2.$



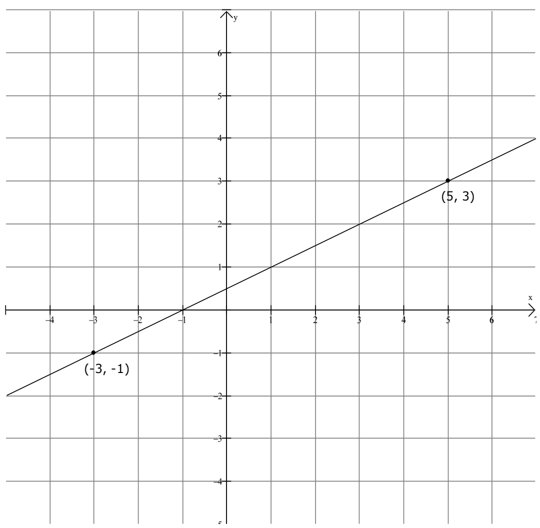
1.6.2 Pendiente Ordenada al Origen. Es la recta cuya pendiente es **"m"** y cuya ordenada en el origen es **"b"** tiene por ecuación **y=mx+b.**

1.6.3 Abscisa y Ordenada al Origen. La recta cuyas intersecciones con los ejes **x** y **y** son; **a≠0** y **b≠0**, respectivamente; tiene por ecuación simétrica $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$.

1.6.4 Ecuación General. Ax+By+C=0; en donde A, B y C son constantes arbitrarias; $m = -\frac{A}{B}$ *y su ordenada en el origen* $b = -\frac{C}{B}$.

Ejemplos.

1) Determinar la abscisa y la ordenada al origen, de la recta que pasa por los puntos (-3, -1) y (5, 3). Obtener la forma general y la simétrica de la recta.



Planteamiento:

$$m = \frac{(y_2 - y_1)}{(x_2 - x_1)}; \quad y - y_1 = m(x - x_1)$$

Desarrollo:

$$m = \frac{3-(-1)}{5-(-3)} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2};$$

$$y-(-1) = \frac{1}{2}(x-(-3)); \quad y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2} - \frac{2}{2};$$

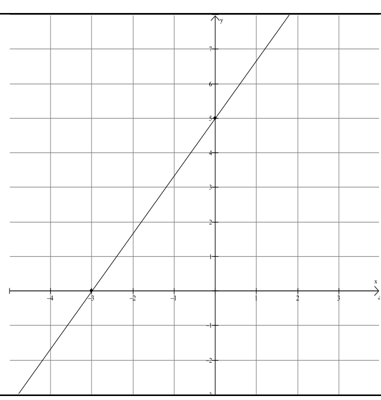
$$y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}; \quad 2y = x+1;$$

$$x - 2y + 1 = 0 \quad \textit{forma general}.$$

$$x - 2y = -1; \quad \frac{x-2y}{-1} = 1; \quad \frac{x}{-1} + \frac{y}{\frac{1}{2}} = 1 \therefore$$

$$a = -1 \ y \ b = \frac{1}{2}. \ \textit{FormaSimét rica}.$$

2) Una recta tiene de abscisa y ordenada en el origen 5 y -3, respectivamente. Hallar su ecuación en la forma general.



Planteamiento:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

Desarrollo:

$$\frac{x}{-3} + \frac{y}{5} = 1; \quad 5x - 3y = -15;$$

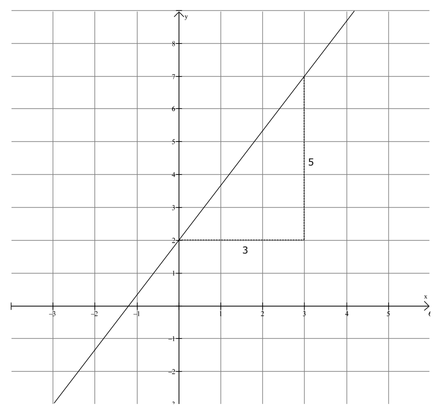
$$5x - 3y + 15 = 0 \quad \textit{Forma General}.$$

3) Trazar la siguiente recta empleando puntos convenientes (sin necesidad de tabular) **5x-3y+6=0.**

Planteamiento:
Pasar a la forma de pendiente-ordenada al origen y despejar **y**, Para obtener la pendiente y la ordenada al origen.
Desarrollo:

$$5x + 6 = 3y; \quad y = \frac{5}{3}x + \frac{6}{3}.$$

$$m = \frac{5}{3} \quad y \quad b = 2.$$



1.6.5 Posiciones Relativas de Dos Rectas. Si las ecuaciones de dos rectas son **Ax+By+C=0** y **A'x+B'y+C'=**0, las relaciones siguientes son condiciones necesarias y suficientes para :

- **Paralelismo.** $m_1 = m_2; \quad \frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} \; o \; AB' - A'B = 0 \; y \; tg\;\theta = 0.$
- **Perpendicularidad.** $AA' + BB' = 0; \; m_1 = -\frac{1}{m_2}; \; m_1 m_2 = -1 \; y \; ctg\;\theta = 0.$
- **Coincidencia.** $A = KA'; \; B = KB'; \; C = KC' \; y \; K \neq 0.$
- **Intersección.** Dos rectas se interceptan en uno y solamente un punto, cuando. $\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'}; \; o \; sea \;\; AB' - A'B \neq 0.$
- **Ángulo entre dos Rectas.** θ, esta dado por la fórmula; $tg\;\theta = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_2 m_1}; \quad m_1 m_2 \neq -1.$ En donde; m_1 es la pendiente inicial y m_2 la pendiente final correspondiente al ángulo θ.
- **Distancia Punto a una Recta.** La distancia de un punto cualquiera normal a una re, esta dada por la fórmula. $D = \frac{|Ax + By + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$ En donde; el signo del radical es **+** si la recta no pasa por el origen y **–** si el punto **P** y el origen están en lados opuestos o del mismo lado de la recta.

Ejemplos.

1) Hallar el ángulo agudo del paralelogramo cuyos vértices son: **A (-2, 1), B (1, 5), C (10, 7) y D (7, 3).**

Planteamiento: $tg\ \theta = \dfrac{m_2 - m_1}{1 + m_2 m_1}$ y

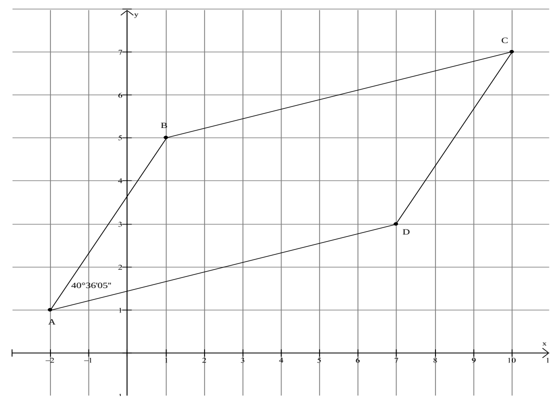
$m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

Desarrollo:

$m_2 = \dfrac{5-1}{1-(-2)} = \dfrac{4}{3}$ y $m_1 = \dfrac{3-1}{7-(-2)} = \dfrac{2}{9}$.

$$tg\ \theta = \frac{\frac{4}{3} - \frac{2}{9}}{1 + \left(\frac{4}{3}\right)\left(\frac{2}{9}\right)} = \frac{\frac{10}{9}}{1 + \frac{8}{27}} = \frac{\frac{10}{9}}{\frac{35}{27}} = \frac{(10)(27)}{(9)(35)}$$

y $\theta = tg^{-1} \dfrac{6}{7} = 40^\circ\ 36'\ 05''$.



2) Hallar la distancia de la recta **3x-4y+12=0** al punto **(4, -1)**, la ecuación normal que pasa por el mismo punto y la intersección entre ambas rectas.

Planteamiento: $D = \dfrac{|Ax + By + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$.

$y - y_1 = m(x - x_1)$; y *sistema de ecuaciones*.

Desarrollo:

$$D = \frac{|3(4) - 4(-1) + 12|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{|12 + 4 + 12|}{\sqrt{9 + 16}}$$

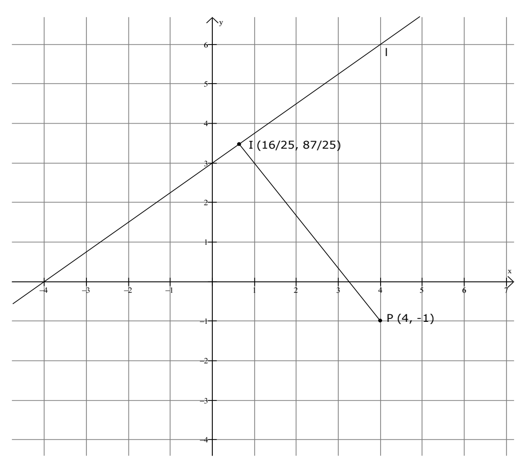
$D = \dfrac{28}{\sqrt{25}} = \dfrac{28}{5} = 5.6\ u.$ Si $y = \dfrac{3}{4}x + 3$

$\therefore m = \dfrac{3}{4}$ y $m_n = -\dfrac{4}{3}$; *por lo tanto,*

$y - (-1) = -\dfrac{4}{3}(x - 4); 3(y + 1) = -4x + 16;$

$y = -\dfrac{4}{3}x + \dfrac{13}{3}$; *igualando ambas ecuaciones*

$\dfrac{3}{4}x + 3 = -\dfrac{4}{3}x + \dfrac{13}{3}; 9x + 36 = -16x + 52;$



$25x = 16;\ x = 0.64\ u.$ *sustituyendo* x *en* y,

$y = \dfrac{3}{4}\left(\dfrac{16}{25}\right) + 3 = 3.48\ u.$

RAP 3. Emplea las condiciones de la línea recta en la solución de problemas, mediante el uso de sus ecuaciones, en situaciones académicas y sociales.

1.6.6 Aplicaciones.

Ejemplo.

Formar equipos de trabajo de 3 o 4 integrantes, para observar y argumentar el desarrollo de este ejemplo guiado, que es de mayor complejidad.

1) Las ecuaciones de los lados de un triángulo son:

a) 3x-5y+11=0;
b) 3x+y-13=0 y
c) 3x+7y-1=0.

Determinar;

a) Las coordenadas de los vértices **A** intersección de las rectas **a) y b), B** intersección de las rectas **b) y c)** y; **C** la intersección de las rectas **a) y c).**

b) La ecuación de la altura que pase por el vértice **B.**

c) La distancia de la recta $\overline{AB}$, al origen.

d) Los vértices del triángulo formado por las rectas que pasan por los vértices **ABC** y que son paralelas a los lados opuestos. Dichos vértices serán **A'B'C'.**

a) Planteamiento: Se despeja **y**, y se le da valores a **x**.

Desarrollo:

$y = \frac{3}{5}x + \frac{11}{5}$; $si\ x = 0\ \therefore$

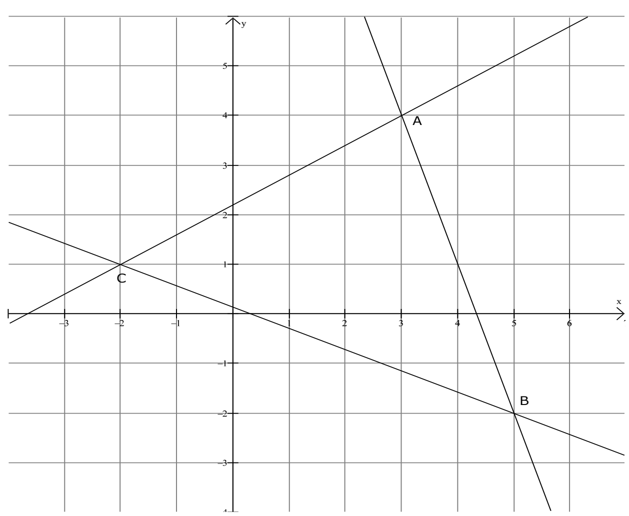
$y = \frac{11}{5}$; $si\ x = 3\ \therefore\ y = 4.$

$y = -3x + 13$; $si\ x = 0\ \therefore$

$y = 13$; $si\ x = 3\ \therefore\ y = 4.$

$y = -\frac{3}{7} + \frac{1}{7}$; $si\ x = -2\ \therefore$

$y = 1$; $si\ x = 5\ \therefore y = -2.$



b) Planteamiento:

$m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}; \quad y - y_1 = m(x - x_1).$

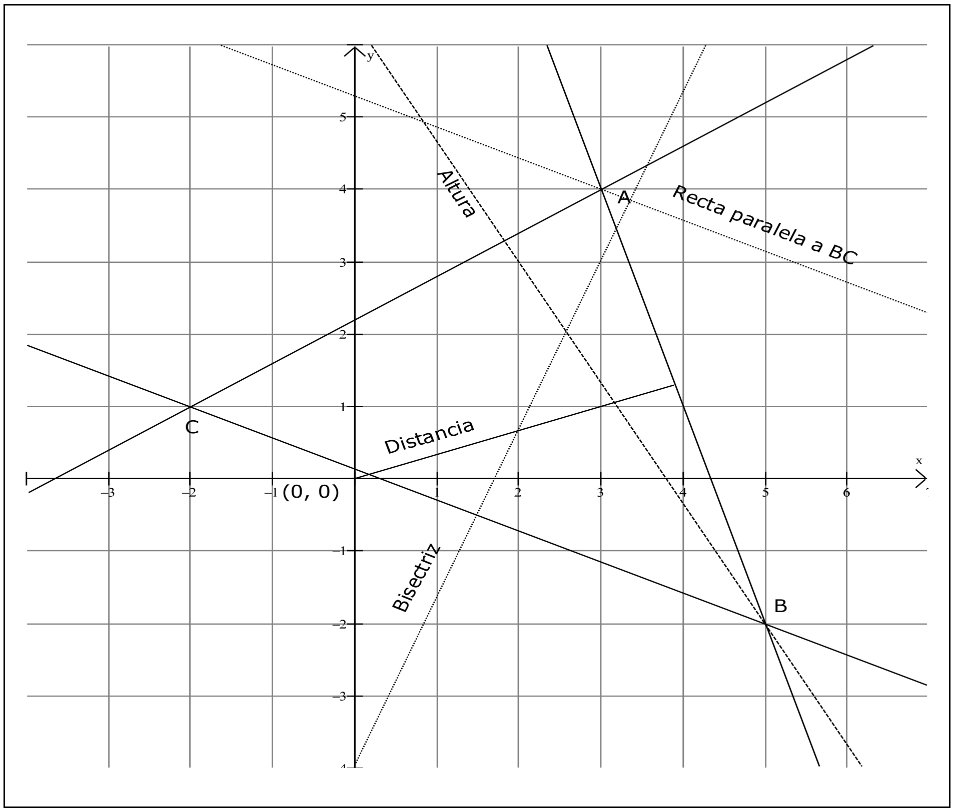
Desarrollo: Calculando la pendiente de $\overline{CA}$. $m = \dfrac{4-1}{3-(-2)} = \dfrac{3}{5}.$

La ecuación de la altura por ser $\perp$ al lado $\overline{CA}$, tiene de pendiente $m = -\frac{5}{3}$. por lo tanto: $y-(-2) = -\frac{5}{3}(x-5)$; $3(y+2) = -5(x-5)$; $3y + 6 = -5x + 25$; $5x + 3y - 19 = 0.$

c) Planteamiento:

$D = \frac{|Ax+By+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$. Siendo la ecuación de la recta $\overline{AB}$. $3x + y - 13 = 0.$

Desarrollo: $D = \frac{|3(0)+1(0)-13|}{\sqrt{3^2+1^2}} = \frac{|-13|}{\sqrt{10}} = 4.111\ u.$



d) Planteamiento y Desarrollo:

La recta que pasa por **A** es paralela al lado $\overline{BC}$ por tanto, su pendiente $m = -\frac{3}{7}$. y su ecuación $3x + 7y - 37 = 0.$ (4)

La recta que pasa por **B** es paralela al lado $\overline{CA}$ por tanto, su pendiente $m = \frac{3}{5}$. y su ecuación $3x - 5y - 25 = 0.$ (5)

La recta que pasa por **C** es paralela al lado $\overline{BA}$ por tanto, su pendiente $m = -3$; y su ecuación $3x + y + 5 = 0.$ (6)

Despejando **x** de **4 y 5** e igualando, tenemos; sustituyendo **y 5.**

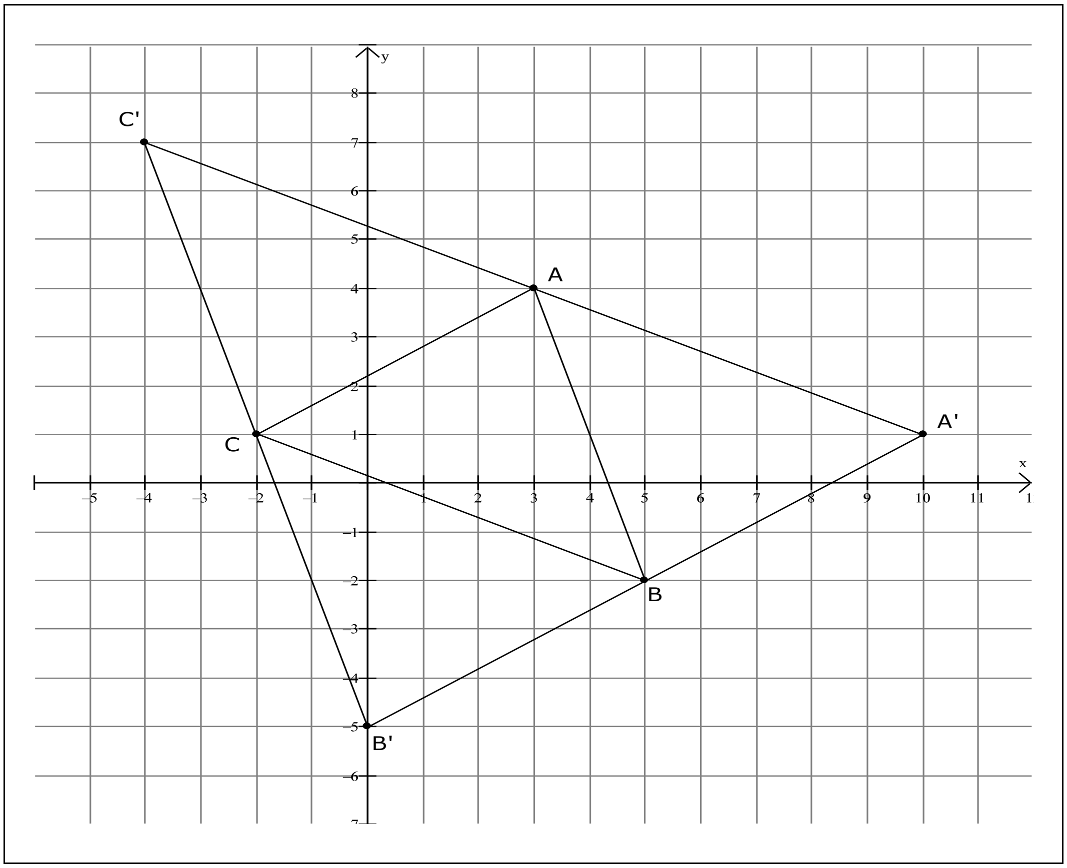
$\frac{37-7y}{3} = \frac{25+5y}{3}$; $37 - 25 = 5y + 7y$; $12y = 12$; $y = 1.$ $x = \frac{25+5(1)}{3} = \frac{30}{3} = 10.$

Despejando **x** de **4 y 6** e igualando, tenemos; sustituyendo **y 6.**

$\frac{37-7y}{3} = \frac{-5-y}{3}$; $37 + 5 = 7y - y$; $6y = 42$; $y = 7.$ $x = \frac{-5-7}{3} = \frac{-12}{3} = -4.$

Despejando **x** de **5 y 6** e igualando, tenemos; sustituyendo **y 6.**

$\frac{25+5y}{3} = \frac{-5-y}{3}$; $25 + 5 = -5y - y$; $-6y = 30$; $y = -5.$ $x = \frac{-5-(-5)}{3} = \frac{0}{3} = 0.$



Ejercicios Propuestos.

1) Dos rectas se cortan formando un ángulo de 135°. Sabiendo que la recta final tiene una pendiente de -3, calcular la pendiente de la recta inicial. **Sol. » -1/2.**

2) Dos rectas se cortan formando un ángulo de 45°, la recta inicial pasa por los puntos A (-2,1) y B (9,7) y la recta final pasa por el punto C (3,9) y por el punto D, cuya abscisa es -2. Hallar la ordenada del punto D. **Sol. » -8.**

3) Demostrar que los cuatro puntos (2,2); (5,6); (9,9) y (6,5) son vértices de un rombo y que sus diagonales son perpendiculares y se cortan en su punto medio. **Sol. »** $\overline{BC} = \overline{AD} = 5\ u;\ \overline{AB} = \overline{DC} = 5\ u; m_{\overline{AD}} = m_{\overline{BC}} = \frac{7}{4};\ m_{\overline{DC}} = m_{\overline{AD}} = \frac{4}{3}; A = C = 16°15'36''; B = D = 171°52'12''\ y\ m_{\overline{DB}} = -1\ y\ m_{\overline{AC}} = 1\ \ son \perp.$

4) Determinar la abscisa y la ordenada al origen, de la recta que pasa por los puntos y la ecuación correspondiente:

a) (-2, 3) y; (4, 0). **Sol. »** $a = 4, b = 2, m = -\frac{1}{2}\ \ y\ \ x + 2y - 4 = 0.$

b) (2, 3) y; (0, -2). **Sol. »** $a = \frac{4}{5}, b = -2, m = \frac{5}{2}\ \ y\ \ 5x - 2y - 4 = 0.$

c) (2, -4) y; (-1, 3) **Sol. »** $a = \frac{2}{5}, b = \frac{2}{3}, m = -\frac{7}{3}\ \ y\ \ 7x + 3y - 2 = 0.$

5) Hallar la ecuación y el ángulo de inclinación de la recta que pasa por los puntos A (-3,2) y B (7,-3).
Sol. » θ=153°26’06’’ y x+2y-1=0.

6) Una recta de pendiente 3 pasa por el punto A (3,2), la abscisa de otro punto de la recta es 4. Hallar su ordenada. **Sol. » 5.**

7) Determinar la ecuación de la recta dada las siguientes condiciones:

a) $m = \frac{2}{3};\ \ (3, 3)$

b) $P_1(7, -3)\ y\ P_2(-4, 1)$

c) m=2 y b=3.

d) a=4 y b=3.

e) $(0,5)\ y\ m = -2.\quad Sol. \gg 2x + y - 5 = 0.$

f) $(5,-4)\ y\ m = -\frac{2}{3}.\quad Sol. \gg 2x - 3y - 2 = 0.$

g) $(2,0)\ y\ m = \frac{3}{4}.\quad Sol. \gg 3x - 4y - 6 = 0.$

8) Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto **(3, -5)** y ángulo de inclinación θ=127°16’43’’.
Sol. » $1.3137x + y + 1.0589 = 0.$

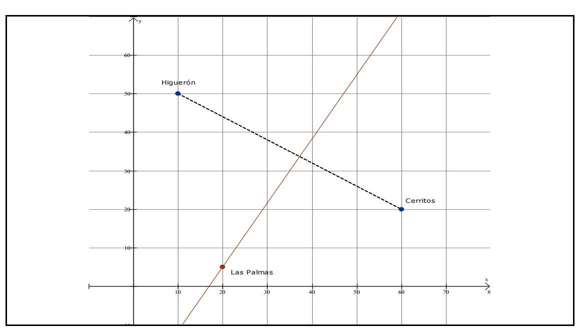
9) Determinar la abscisa y la ordenada al origen, de la recta que pasa por los puntos dados y obtener la forma simétrica y general de la recta.
a) (2, 3) y (4, 7). **Sol. »**
b) (4, 2) y (-5, 7). **Sol. »**
c) (3, 2) y (0, -7). **Sol. »**
d) (7, -3) y (-4, 1). **Sol. »**
e) (5, -5) y (-3, -1). **Sol. »**

10) Una recta tiene de abscisa y ordenada en el origen los puntos dados, respectivamente. Hallar su ecuación en forma simétrica y general.
a) a=4 y b=3. **Sol »**
b) a=-2 y b=5. **Sol »**
c) a=5 y b=-6. **Sol »**

11) Trazar la recta, empleando puntos convenientes. Sin tabular.
a) 3x-5y-15=0. **Sol »**
b) 3x+2y-7=0. **Sol »**
c) X+y-8=0. **Sol »**
d) 4x-2y-14=0. **Sol »**
e) 4x-3y-7=0. **Sol »**

12) Hallar la distancia entre las rectas paralelas dadas x+y-4=0 y x+y-10=0. **Sol » d=4.243 u.**

13) Para comunicar el fraccionamiento las Palmas con la carretera que une los poblados de Higuerón y Cerritos, se construirá un camino recto de asfalto. ¿A qué distancia de la entrada del fraccionamiento quedará la carretera? **Sol »d=33.442 u.**



14) Encontrar las ecuaciones de las medianas y un punto de intersección del triángulo cuyos vértices son los puntos A (3,-2), B(-3,6) y C(4,4). **Sol. »**

15) Hallar el área del triángulo cuyos vértices son A (1,-3); B (3,3) y C (6,-1). **Sol. » 13.**

16) Se instala una empresa con una inversión de $ 50, 000, el costo de producción de un artículo es de $3,00 y se venderá al mercado en un precio unitario de $4,50. Determina la ecuación que representa la ganancia considerando que los artículos producidos son igual a los vendidos y cuantos artículos hay que producir para tener una ganancia de $ 10,000. **Sol. » y= 1.50x-5000; x=40 000 artículos.**

17) La pendiente de la recta que pasa por el punto A (3,2) es igual a ¾. Hallar las coordenadas de los puntos que se encuentran a 5 unidades de distancia de A. **Sol. » 13.**

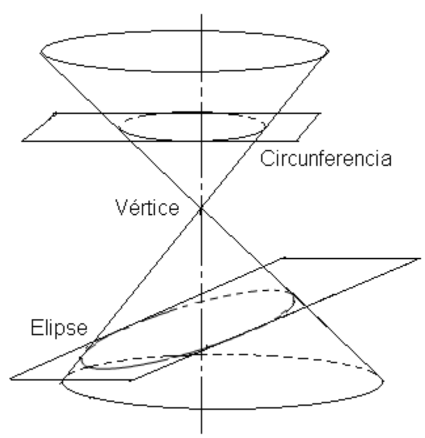
18) Hallar la ecuación de la mediatriz (□ en su punto medio) del segmento que pasa por los puntos (-2, 1) y (3, -5). **Sol. » 10x-12y-29=0.**

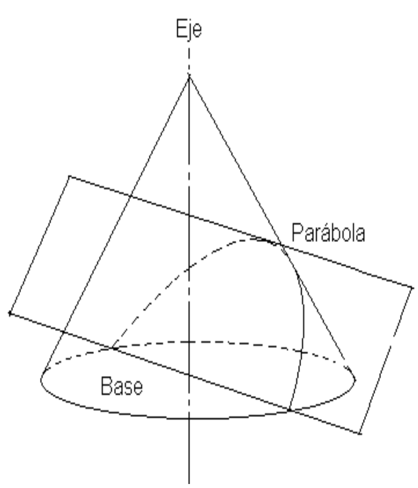
Unidad 2. Cónicas (Circunferencia, Parábola, Elipse e Hipérbola).

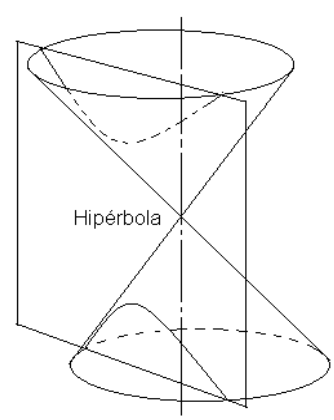
Competencia Particular. Resuelve problemas que involucren ecuaciones de segundo grado y su representación grafica, mediante la identificación de los elementos específicos de cada una de las cónicas, en situaciones académicas y sociales.

RAP 1. Ubica los elementos de las cónicas, a partir de la ecuación de segundo grado.

Cónicas. Los griegos definieron las curvas cónicas como las diferentes intersecciones que pueden obtenerse a partir de un plano. Particularmente esta constitución se debe al matemático griego Apolonio de Perga (800 a. C.).

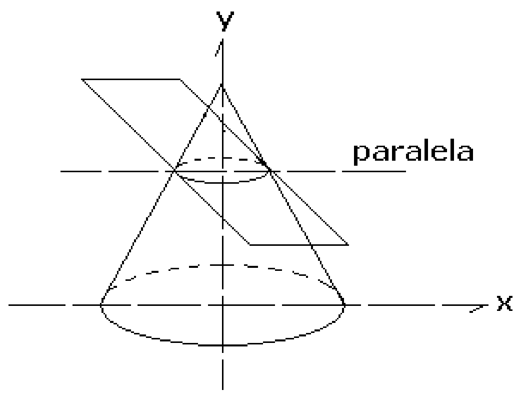






2.1.1. La Circunferencia.

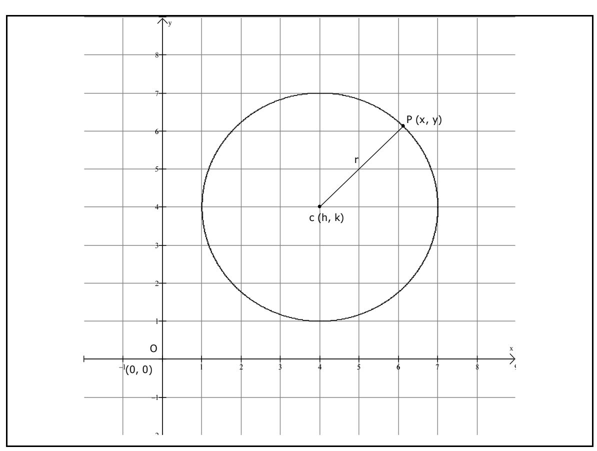
La circunferencia es el perímetro curvo del corte efectuado por un plano paralelo a la base de un cono.



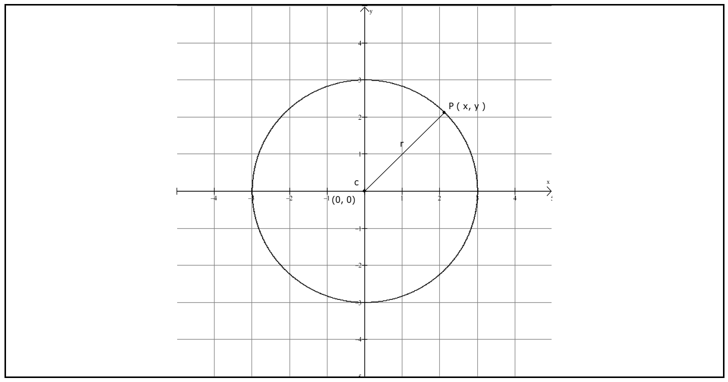
Ecuación Ordinaria. La circunferencia es el lugar geométrico de un punto que se mueve en el plano, manteniéndose a una distancia constante de un punto fijo del mismo plano. El punto fijo se llama “centro” (c) y la distancia constante se llama “radio” (r).

Analíticamente es una ecuación de segundo grado, con dos variables $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$, pero no toda ecuación de este tipo representa siempre una circunferencia; sólo en determinadas condiciones, como son:

La ecuación de una circunferencia cuyo centro está en el punto **C (h, k)** y de radio **r** es: $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$. Conocido con el nombre de “Ecuación Ordinaria” de la circunferencia.

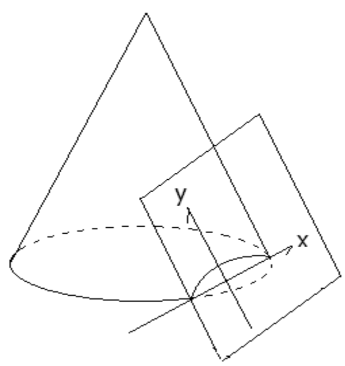


Ahora bien, si el centro se ubica en el origen (0, 0), como se observa en la figura, la ecuación ordinaria de la curva se reduce a $x^2 + y^2 = r^2$ conocida *como "Ecuación Canónica".*

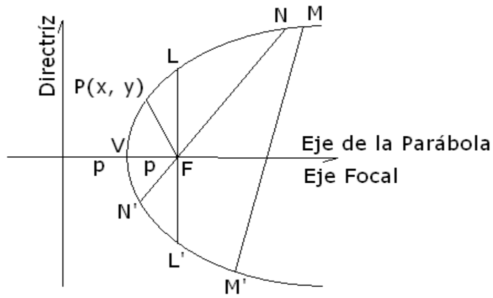


2.1.2. La Parábola.

La parábola es el perímetro curvo del corte efectuado por un plano paralelo a una directriz del cono.



Por lo tanto, es el lugar geométrico de un punto que se mueve en un plano de tal manera que su distancia de una recta fija, situada en el plano, es siempre igual a su distancia de un punto fijo del plano y que no pertenece a la recta. El punto fijo se llama "foco" y la recta fija "directriz" de la parábola.

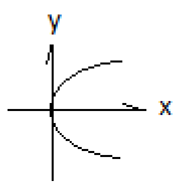


En donde; **V** es el vértice, **F** el foco, **P** un punto cualquiera, **p** distancia entre el vértice y el foco igual a la distancia entre el vértice y la directriz, **LL'** lado recto $\perp$ al eje focal, **NN'** cuerda focal, **MM'** cuerda y, **FP** radio focal o radio vector.

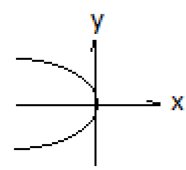
2.1.2.1. Ecuación la Parábola con Vértice en el Origen y Eje Focal un Eje Coordenado.

- *Si el eje focal coincide con el eje "x" la ecuación será* $y^2 = 4px$.
  El F (p, 0); la ecuación de la directriz es x=-p; LR=l4pl y;

Si p>0 la parábola abre a la derecha.

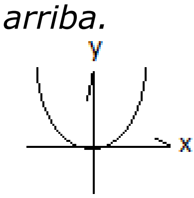


Pero si p<0 la parábola abre a la izquierda.

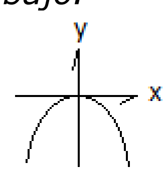


- *Si el eje focal coincide con el eje "y" la ecuación será* $x^2 = 4py$.
  El F (0, p); la ecuación de la directriz es y=-p; LR=l4pl y;

Si p>0 la parábola abre hacia arriba.



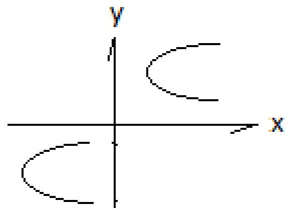
Pero si p<0 la parábola abre hacia abajo.



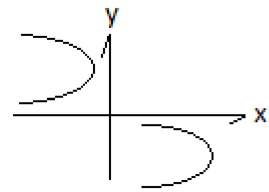
2.1.2.2. Ecuación de la Parábola con Vértice fuera del Origen y Eje Focal Paralelo a un Eje Coordenado.

- *Si el eje focal es paralela al eje "x" la ecuación será* $(y-k)^2 = 4p(x-h)$.
  El F (p+h, 0); la ecuación de la directriz es x=-p+h; LR=l4pl y;

Si p>0 la parábola abre a la derecha.

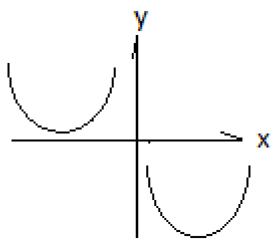


Pero si p<0 la parábola abre a la izquierda.

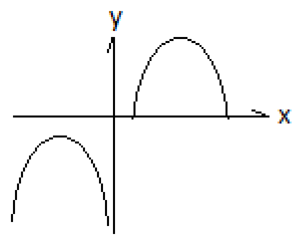


- *Si el eje focal es paralelo al eje "y" la ecuación será* $(x-h)^2 = 4p(y-k)$.
  El F (0, p+k); la ecuación de la directriz es y=-p+k; LR=l4pl y;

Si p>0 la parábola abre hacia arriba.



Pero si p<0 la parábola abre hacia abajo.



2.1.2.3. Ecuación General de la Parábola.

$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$.

- Sí A=0; C≠0 y D≠0; La Ecuación representa una Parábola cuyo eje es paralelo o coincide con el eje "x". $Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$.
- Sí A≠0; C=0 y E≠0; La Ecuación representa una Parábola cuyo eje es paralelo o coincide con el eje "y". $Ax^2 + Dx + Ey + F = 0$.

2.1.2.4. Dado tres puntos de la Parábola y cuyo eje es paralelo a uno de los ejes coordenados. $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$;

- Sí el eje focal es paralelo al eje "x", entonces A=0; y la ecuación queda $Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$;

  dividiendo la ecuación entre C; $y^2 + \frac{D}{C}x + \frac{E}{C}y + \frac{F}{C} = 0$;

  y tomando $D' = \frac{D}{C}$; $E' = \frac{E}{C}$; $F' = \frac{F}{C}$; la Ecuación

  finalmente queda. $y^2 + D'x + E'y + F' = 0.$

- Sí el eje focal es paralelo al eje "y", entonces C=0; y la ecuación queda $Ax^2 + Dx + Ey + F = 0$;

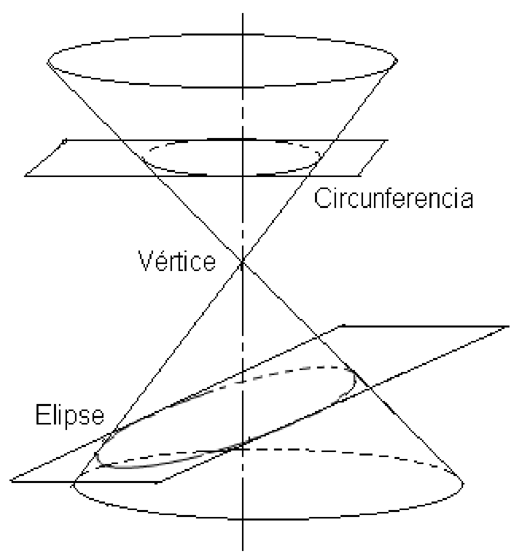
  dividiendo la ecuación entre A; $x^2 + \frac{D}{A}x + \frac{E}{A}y + \frac{F}{A} = 0$;

  haciendo $D' = \frac{D}{A}; \quad E' = \frac{E}{A}; \quad F' = \frac{F}{A}$; la Ecuación

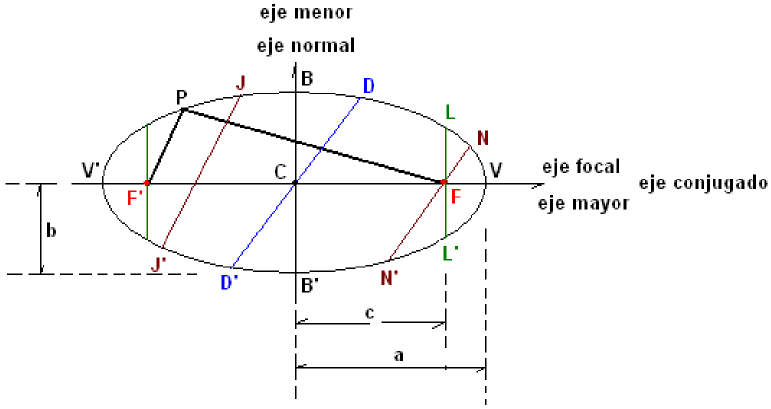
  finalmente queda. $x^2 + D'x + E'y + F' = 0.$

2.1.3. La Elipse.

La elipse es el perímetro curvo del corte efectuado por un plano oblicuo a la base y a las generatrices del cono.



Es el lugar geométrico de un punto que se mueve en un plano de tal manera que la suma de sus distancias a dos puntos fijos de ese plano es siempre igual a una constante, mayor que la distancia entre dichos puntos; llamados "focos de la elipse".



En donde; **V** y **V'** son los vértices, **F** y **F'** los focos, **VV'** eje mayor=2a, **p** un punto cualquiera de la elipse, **BB'** eje menor=2b, **JJ'** cuerda, **LL'** lado recto $\perp$ al eje focal, **NN'** cuerda focal, **DD'** diámetro, **FP** y **F'P** radio vector y **C** centro.

2.1.3.1. Ecuación de la Elipse de Centro en el Origen y Ejes Coordenados los Ejes de la Elipse.

- Si una elipse tiene su centro en el origen y su eje focal coincide con el eje "x", su ecuación es.

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

- Si una elipse tiene su centro en el origen y su eje focal coincide con el eje "y", su ecuación es.

$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1.$$

En donde;

$$2a = longitud\ \ del\ \ eje\ \ mayor \quad y; \quad 2b = longitud\ \ del\ \ eje\ \ menor.$$

$$a^2 = b^2 + c^2; \quad LR = \frac{2b^2}{a}; \quad e = \frac{c}{a}.$$

2.1.3.2. Ecuación de la Elipse con Centro Fuera del Origen y Ejes paralelos a los Ejes coordenados.

- Si una elipse tiene su centro en (h, k) y su eje focal es paralelo al eje "x", su ecuación ordinaria será.

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1.$$

- Pero, si la elipse tiene su centro en (h, k) y su eje focal es paralelo al eje "y", su ecuación es.

$$\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1.$$

En donde;

$$2a = longitud\ \ del\ \ eje\ \ mayor \quad y; \quad 2b = longitud\ \ del\ \ eje\ \ menor.$$

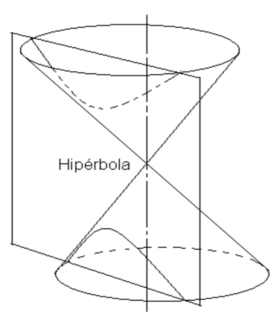
$$a^2 = b^2 + c^2; \quad LR = \frac{2b^2}{a}; \quad e = \frac{c}{a}.$$

2.1.3.3. Ecuación General de la Elipse. $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$

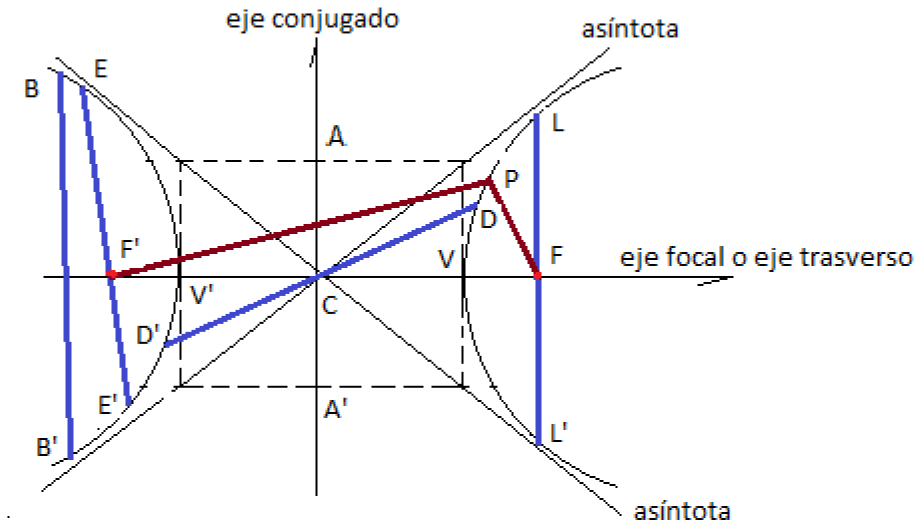
Sí **A** y **C** son del mismo signo, la ecuación $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$**;** representa una elipse de ejes paralelos a los coordenados, o bien un punto, o no representa ningún lugar geométrico real.

2.1.4. La Hipérbola.

La hipérbola es el perímetro curvo del corte efectuado por un plano paralelo al eje y perpendicular a las bases del cono de "dos mantos".



Es el lugar geométrico de un punto que se mueve en un plano de tal manera que el valor absoluto de la diferencia de sus distancias a dos puntos fijos del plano, llamados focos, es siempre igual a una cantidad constante, positiva y menor que la distancia entre los focos.

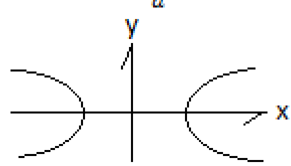


En donde: F y F′ son los focos, V y V′ los vértices, VV′ eje trasverso=2a, C centro, AA′ eje conjugado=2b y/o eje normal, BB′ cuerda, EE′ cuerda focal, LL′ lado recto, DD′ diámetro, P punto cualquiera de la hipérbola, FP y F′P radio vector y FF′ eje focal=2c y;

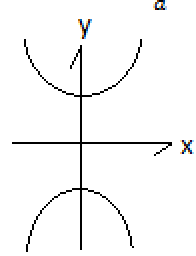
Las relaciones son: $c^2 = a^2 + b^2$; $LR = \frac{2b^2}{a}$ y $e = \frac{c}{a} > 1$.

2.1.4.1. Ecuación Ordinaria de la Hipérbola con Centro en el Origen.

- Si el eje focal coincide con el eje **x** la ecuación es; $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$; los focos (±c, o); la asíntota $y = \pm\frac{b}{a}x$ y; la hipérbola es horizontal.

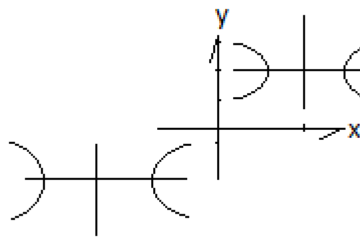


- Pero si el eje focal coincide con el eje **y** la ecuación es; $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$; los focos (o, ±c); la asíntota $x = \pm\frac{b}{a}y$ y; la hipérbola es vertical.

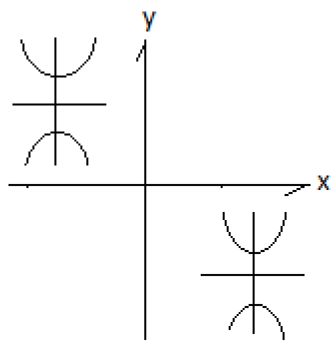


2.1.4.2. Ecuación Ordinaria de la Hipérbola con Centro fuera del Origen (h, k).

- Si el eje focal es paralela con el eje **x** la ecuación es; $\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$; los focos (a±c, o); la asíntota $y=\pm\frac{b}{a}(x-h)+k$ y; la hipérbola es horizontal.



- Pero si el eje focal es paralela con el eje **y** la ecuación es; $\frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$; los focos (o, a±c); la asíntota $x=\pm\frac{b}{a}(y-k)+h$ y; la hipérbola es vertical.



2.1.4.3. Forma General de la Hipérbola con Centro en y/o fuera del Origen. $Ax^2+Cy^2+Dx+Ey+F=0$.

RAP 2. Obtiene la ecuación y la representación grafica correspondiente a cada una de las cónicas a partir de sus elementos.

- **Circunferencia.**

Ejemplos.

1) Una circunferencia tiene su centro en **(6, -2)** y pasa por el punto **(4, 0)**. Hallar su ecuación ordinaria.

Planteamiento.

$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$

Desarrollo.

Sustituyendo las coordenadas del punto y del centro, se tiene.

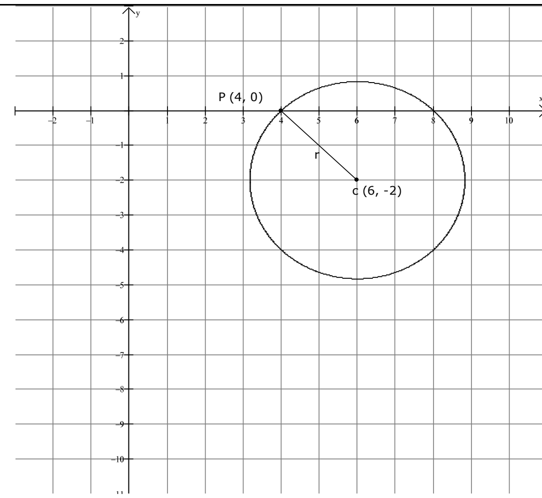
$(4-6)^2+(0+2)^2=r^2; \quad r^2=4+4;$

$r^2=8 \quad o\ bien \quad r=\sqrt{8}.$

$(x-6)^2+(y+2)^2=8;$

$x^2-12x+36+y^2+4y+4-8=0;$

$x^2+y^2-12x+4y+32=0.$



2) Hallar la ecuación de la circunferencia con centro en el origen y pasa por el punto **(7, 0)**.

Planteamiento.

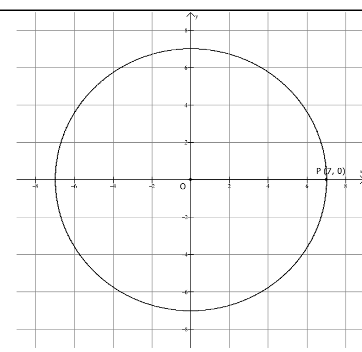
$x^2+y^2=r^2;$ *Como pasa por el punto* $(7,0)$.

Desarrollo.

Sustituyendo el punto en la ecuación

$7^2+0=r^2; \quad r^2=49. \quad \therefore \quad x^2+y^2=49;$

$x^2+y^2-49=0.$



3) Hallar la ecuación de la circunferencia de centro **(-2, 3)** y radio **4**.

Planteamiento.

$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$

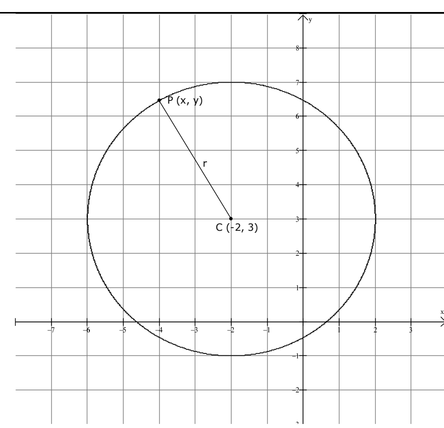
Desarrollo.

Sustituyendo las coordenadas del centro y el valor del radio, se tiene.

$(x+2)^2+(y-3)^2=4^2;$

$x^2+4x+4+y^2-6y+9-16=0;$

$x^2+y^2+4x-6y-3=0.$



4) Determinar la ecuación de la circunferencia si los extremos de uno de sus diámetros son los puntos **(6, 2)** y **(-2, -4)**.

Planteamiento.

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2};\quad x_m=\frac{x_1+x_2}{2}\ y;\quad y_m=\frac{y_1+y_2}{2}.$$

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2.$$

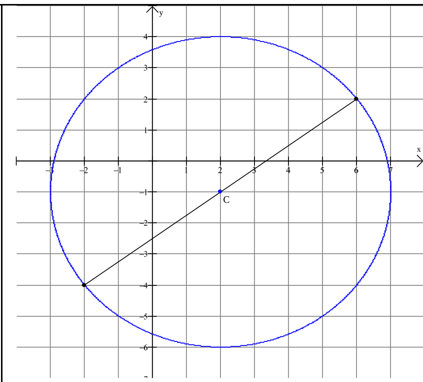
Desarrollo.

$$x_m=\frac{6-2}{2}=2;\quad y_m=\frac{2-4}{2}=-1;\quad r=\sqrt{(6-2)^2+(2-(-1))^2}$$

$$r=\sqrt{16+9}=\sqrt{25}=5.\quad (x-2)^2+(y+1)^2=25\ E.O.$$

$$x^2-4x+4+y^2+2y+1-25=0;$$

$$x^2+y^2-4x+2y-20=0.$$



5) Hallar la ecuación de la circunferencia cuyo centro esta en el punto **(10, -5)** y es tangente a la recta $4x+3y-50=0$.

Planteamiento.

$$r=\frac{|ax+by+c|}{\sqrt{A^2+B^2}};\quad (x-h)^2+(y-k)^2=r^2.$$

Desarrollo.

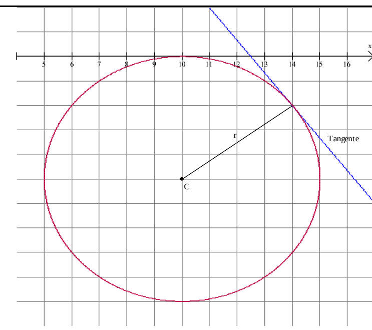
$$x_m=\frac{6-2}{2}=2;\quad y_m=\frac{2-4}{2}=-1;$$

$$r=\sqrt{(6-2)^2+(2-(-1))^2}$$

$$r=\sqrt{16+9}=\sqrt{25}=5.\quad (x-2)^2+(y+1)^2=25\ E.O.$$

$$x^2-4x+4+y^2+2y+1-25=0;$$

$$x^2+y^2-4x+2y-20=0.$$

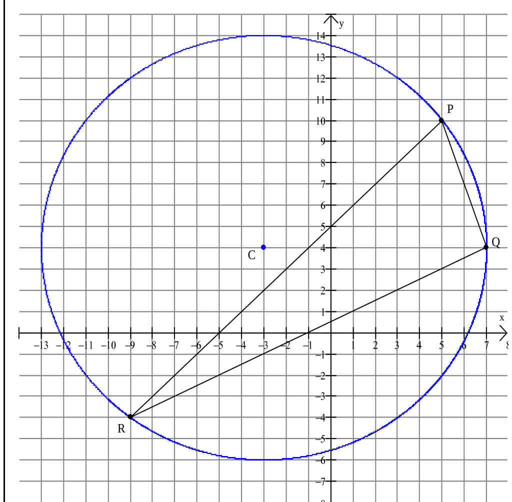


Intégrate a un equipo de trabajo de 3 o 4 compañeros, para observar y argumentar el desarrollo de estos dos ejemplos guiados, que son de mayor complejidad.

6) Si los puntos **P (5, 10), Q (7, 4) y R (-9, -4)**, son los vértices de un triángulo, determinar la ecuación ordinaria y general de la circunferencia circunscrita.

7) Dada la ecuación de la circunferencia $36x^2+36y^2+48x-108y+97=0$, hallar el centro, el radio y la ecuación ordinaria de dicha circunferencia.

6)

Planteamiento. $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0;\quad r=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$ $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2.$ **Desarrollo.** $h^2+k^2-r^2+18h+8k+97=0;$ $h^2+k^2-r^2-14h-8k+65=0;\quad h=-3;$ $h^2+k^2-r^2-10h-20k+125=0;\quad k=4;$ $r=\sqrt{(0-4)^2+(-(-3))^2}=\sqrt{100}=10.$ $(x+3)^2+(y-4)^2=100;\quad E.O.$ $x^2+y^2+6x-8y-75=0;\quad E.G.$	

7)

Planteamiento y Desarrollo.

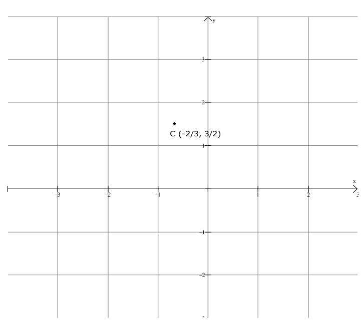
$36x^2+36y^2+48x-108y+97=0;\quad 36x^2+48x+36y^2-108y+97=0;$

$36(x^2+\frac{48}{36}x)+36(y^2-\frac{108}{36}y)+97=0;\quad 36\left(x^2+\frac{8}{6}x\right)+36\left(y^2-\frac{18}{6}\right)+97=0;$

$36\left(x^2+\frac{4}{3}x+\frac{16}{36}-\frac{16}{36}\right)+36\left(y^2-3y+\frac{9}{4}-\frac{9}{4}\right)+97=0;$

$36\left(x+\frac{4}{6}\right)^2-16+36\left(y-\frac{3}{2}\right)^2-81+97=0;\qquad C(h,k)$

$36\left(x+\frac{2}{3}\right)^2+36\left(y-\frac{3}{2}\right)^2=0;\quad \left(x+\frac{2}{3}\right)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)=0;\qquad h=\frac{2}{3};\quad k=\frac{3}{2};\quad r=0.$



- **Parábola. *Ejemplos.***

1) Una parábola cuyo vértice está en el origen y cuyo eje coincide con el eje "y", pasa por el punto (4, 2). Hallar la ecuación de la parábola, las coordenadas de su foco, la ecuación de la directriz y la longitud de su lado recto. Trazar la gráfica correspondiente.

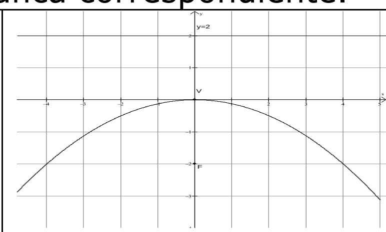
Planteamiento: $x^2 = 4py$

Desarrollo:

$(4)^2 = 4p$ (-2); 16=-8p; p=16/-8; p=-2

por tanto la ecuación es: $x^2 = -8y$; F(0, -2);

y =-(-2); y=2 directriz. LR=4(-2); LR =8.



2) Discutir la ecuación $y^2 = -6x$ y dibujar la curva.

Planteamiento:

De acuerdo con el análisis la curva coincide con el eje "x" y p es (-). Por lo tanto la curva abre hacia la izquierda.

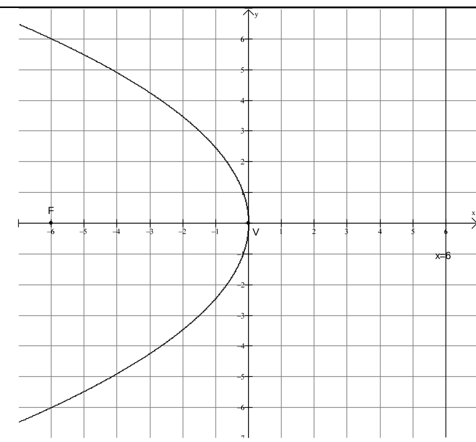
Desarrollo: $x = \frac{y^2}{-6}$:

si y=0, x=0; si y=±2, x =-0.7 y; si y=±4, x =-2.7

LR =4p; LR =4(-6); LR =-24

Directriz: x =-p; x =-(-6); x =6

F (p, 0); F (-6, 0). V (0, 0).



3) Hallar la ecuación de la parábola de vértice en el origen, el lado recto y las coordenadas de su foco. Si la directriz es la recta y+5 =0.

Planteamiento:

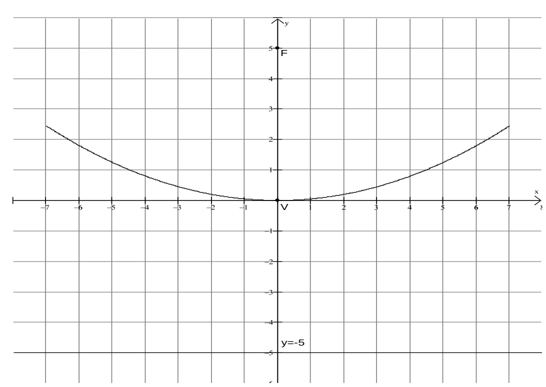
Si la directriz es la recta y+5=0; entonces y =-5. Por lo tanto, la parábola abre hacia arriba.

Desarrollo:

p=5; LR=4p; LR=4(5); LR=20: F (0, 5); La ecuación será $x^2 = 4py$;

es decir $x^2 = 20y$; de donde:

$y = \frac{x^2}{20}$. si x=0, y=0; si x=±2, y=0.2 y; si x=±4; y=0.8



4) Hallar la ecuación de la parábola cuyo vértice es el punto (3, 4) y cuyo foco es el punto (3, 2). Hallar también la ecuación de su directriz, la longitud de su lado recto y la gráfica correspondiente.

Planteamiento:

$(x-h)^2 = 4p(y-k)$

Desarrollo:

P=-2;

$(x-3)^2 = 4(-2)(y-4)$;

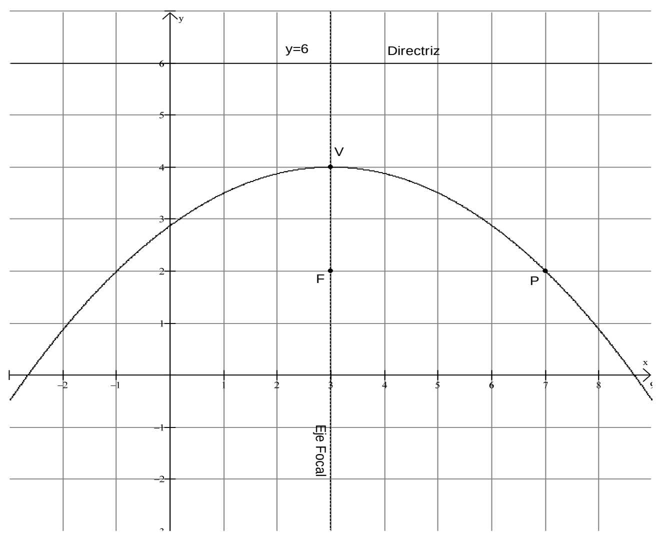
$x^2 - 6x + 9 = -8(y-4)$;

$x^2 - 6x + 9 = -8y + 32$

$x^2 - 6x + 8y + 9 - 32 = 0$;

$x^2 - 6x + 8y - 23 = 0$

y=6; LR=4p=LR=8.



5) Determinar la ecuación de la parábola cuyo foco es el punto (-3, 1) y cuya directriz es la recta x=3. Hallar también su lado recto y trazar la gráfica correspondiente.

Planteamiento:

$(y-k)^2 = 4p(x-h)$

p=-3; $(y-1)^2 = 4(-3)(x-0)$

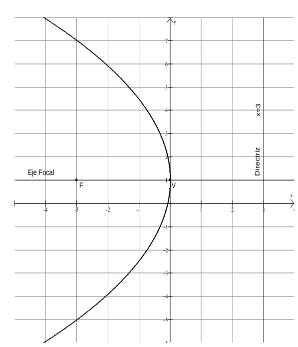
Desarrollo:

$y^2 - 2y + 1 = -12(x)$

$y^2 - 2y + 1 = -12x$

$y^2 - 2y + 12x + 1 = 0$

$LR = 4p = 4(-3) = LR = 12; \quad V(0,1)$



6) Demostrar que la ecuación $4x^2 - 20x - 24y + 97 = 0$ representa una parábola y hallar las coordenadas del vértice y del foco, la ecuación de su directriz y la longitud de su lado recto. Trazando la gráfica correspondiente.

Planteamiento:

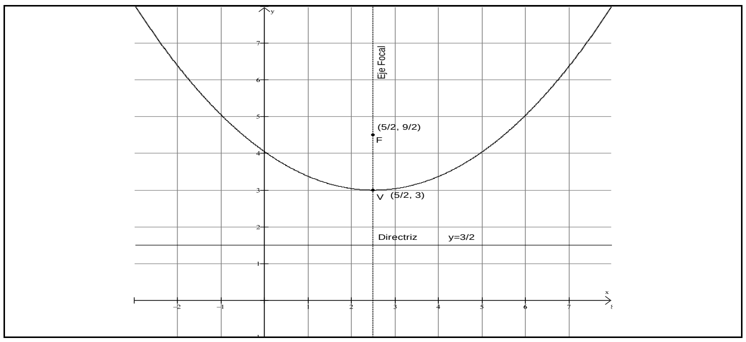
$4x^2 - 20x - 24y + 97 = 0$; es una parábola cuyo eje focal es paralela o coincide con el eje "y". Dividiendo entre 4; $x^2 - 5x - 6y + \frac{97}{4} = 0$

Desarrollo:

$$x^2-5x+\frac{25}{4}-\frac{25}{4}-6y+\frac{97}{4}=0;\quad \left(x-\frac{5}{2}\right)^2=6y+\frac{25}{4}-\frac{97}{4};$$

$$\left(x-\frac{5}{2}\right)^2=6y-\frac{72}{2};\qquad \left(x-\frac{5}{2}\right)^2=\frac{24}{4}(y-3);\quad \left(x-\frac{5}{2}\right)^2=6(y-3);\quad 4p=6;$$

$$p=\frac{6}{4};\quad p=\frac{3}{2};\quad LR=|4p|;\quad LR=6;\quad Directriz\quad y=\frac{3}{2};\quad V\left(\frac{5}{2},3\right);\quad F\left(\frac{5}{2},\frac{9}{2}\right).$$



7) Verificar que la ecuación $4y^2-48x-20y=71$ representa una parábola y hallar las coordenadas del vértice y del foco, la ecuación de su directriz y la longitud de su lado recto. Trazando la gráfica correspondiente.

Planteamiento:

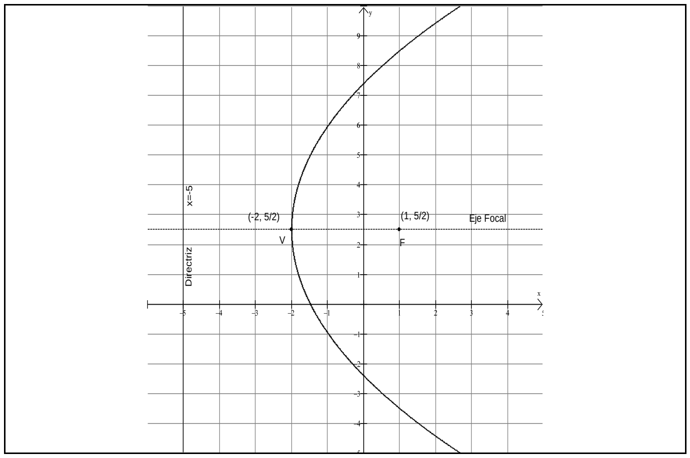
$4y^2-48x-20y=71$ es una parábola cuyo eje focal es paralela o coincide con el eje "x". Dividiendo entra 4; $y^2-12x-5y=\frac{71}{4}$.

Desarrollo:

$$y^2-5y+\frac{25}{4}=12x+\frac{71}{4}+\frac{25}{4};\quad \left(y-\frac{5}{2}\right)^2=12x+\frac{96}{4}$$

$$\left(y-\frac{5}{2}\right)^2=12x+24;\quad \left(y-\frac{5}{2}\right)^2=12(x+2);\quad 4p=12;\quad p=\frac{12}{4};\quad p=3;$$

$$LR=|4p|;\quad LR=12;\quad Directriz\quad x=-5;\quad V\left(-2,\frac{5}{2}\right);\quad F\left(1,\frac{5}{2}\right).$$



Intégrate a un equipo de trabajo de 3 o 4 compañeros, para observar y argumentar el desarrollo de estos dos ejemplos guiados, que son de mayor complejidad.

8) Hallar la ecuación de la parábola cuyo eje es paralela al eje "x" y pasa por los puntos $\left(\frac{3}{2}, -1\right)$; $(0, 5)$ y $(-6, -7)$.

Planteamiento: $y^2 + D'x + E'y + F' = 0.$

$1 + \frac{3}{2}D' - E' + F' = 0; \quad \frac{3}{2}D' - E' + F' = -1 \ (1)$

$25 + 5E' + F' = 0; \quad 5E' + F' = -25 \ (2)$

$49 - 6D' - 7E' + F' = 0; \quad -6D' - 7E' + F' = -49 \ (3)$

Desarrollo:

Tomando la (1) y (3), al multiplicar (1) por 4.

$$\begin{array}{r} 6D' - 4E' + 4F' = -4 \\ -6D' - 7E' + F' = -49 \\ \hline -11E' + 5F' = -53 \ (4) \end{array}$$

Ahora tomando la (2) y (4), al multiplicar (2) por -5

$$\begin{array}{r} -25E' - 5F' = 125 \\ -11E' + 5F' = -53 \\ \hline -36E' = 72 \end{array} \quad ; \quad E' = \frac{72}{-36};$$

E'=-2; sustituyendo E' en (2)
5(-2)+F'=-25; F'=-25+10; **F'=-15**
sustituyendo E' y F' en (1)

$\frac{3}{2}D' - (-2) + (-15) = -1;$

$\frac{3}{2}D' = -1 + 15 - 2; \quad D' = \frac{2}{3}(12)$

$D' = 8$

$y^2 + 8x - 2y - 15 = 0$

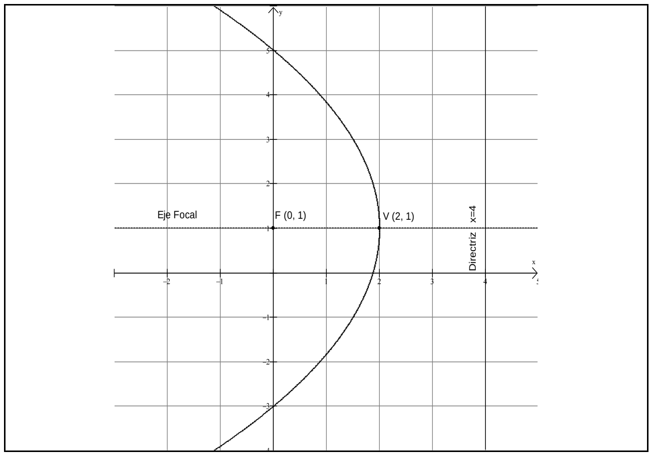
$y^2 - 2y = -8x + 15;$

$y^2 - 2y + 1 = -8x + 15 + 1$

$y^2 - 2y + 1 = -8x + 16$

$(y-1)^2 = -8(x-2); \quad LR = 8; \quad p = -2;$

$Directriz \ \ x = 4; \quad F\ (0, 1)$



9) Hallar la ecuación de la parábola cuyo eje es paralelo al eje "y" y pasa por los puntos $(0, 0)$; $(8, -4)$ y $(3, 1)$.

Planteamiento:

$x^2 + D'x + E'y + F' = 0.$

$F' = 0;$

$64 + 8D' - 4E' + F' = 0; \quad 8D' - 4E' + F' = -64 \quad (1)$

$9 + 3D' + E' + F' = 0; \quad 3D + E' + F' = -9 \quad (2)$

Desarrollo:

Tomando la (1) y (2), al multiplicar (2) por 4.

$$\begin{array}{r} 12D' + 4E' + 4F' = -36 \\ 8D' - 4E' + F' = -64 \\ \hline 20D' + 5F' = -100 \quad (3) \end{array}$$

Sustituyendo F' en (3).

$20D' + 5(0) = -100$

$D' = \frac{-100}{20}; \quad D' = -5$

Sustituyendo D' y F' en (2)

3(-5)+E'+0=-9; E'=-9+15; **E'=6**

Quedando la ecuación:

$x^2 - 5x + 6y = 0$

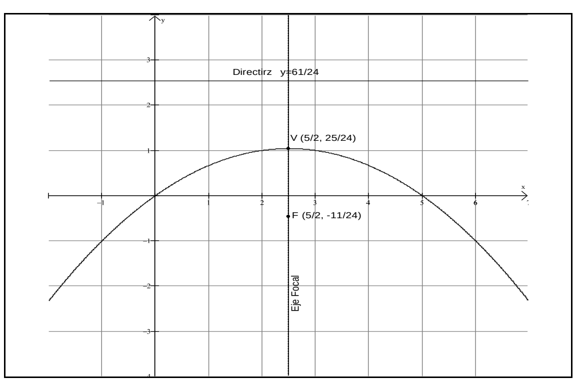
$x^2 - 5x = -6y;$

$x^2 - 5x + \frac{25}{4} = -6y + \frac{25}{4}$

$\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 = -6\left(y - \frac{25}{4} * \frac{1}{6}\right)$

$\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 = -6\left(y - \frac{25}{24}\right); \quad LR = 6; \quad p = -\frac{3}{2};$

$Directriz \;\; y = \frac{61}{24}; \quad F\left(\frac{5}{2}, -\frac{11}{24}\right).$



- **Elipse.**

Ejemplos.

1) En la siguiente ecuación $16x^2 + 25y^2 = 400$. Hallar las coordenadas de los vértices y focos, las longitudes de los ejes mayor y menor, la excentricidad y la longitud de cada lado recto. Graficar.

Planteamiento y Desarrollo:

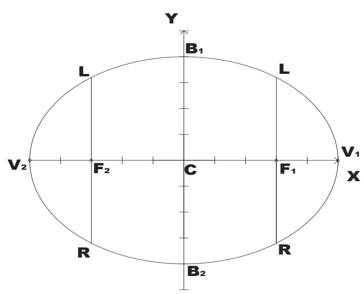
$$\frac{16x^2}{400} + \frac{25y^2}{400} = \frac{400}{400}; \quad \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1; \quad a^2 = 25; \quad b^2 = 16$$

$$c = \sqrt{a^2 - b^2}; \quad c = \sqrt{25 - 16}$$

$$c = \sqrt{9}; \quad c = 3$$

Resultado: Eje mayor= $2a$ =10; Eje menor= $2b$ =8;

TR = $\frac{2b^2}{a} = \frac{2(16)}{5} = \frac{32}{5} = 6.4$; e = $\frac{c}{a} = \frac{3}{5}$.

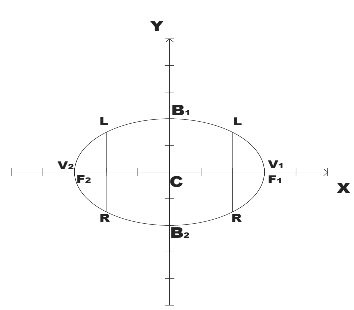


2) Hallar la ecuación de la elipse cuyos focos son los puntos (2, 0), (-2, 0) y su excentricidad es igual $\frac{2}{3}$.

Planteamiento y desarrollo:

$$e = \frac{c}{a}; \quad e = \frac{2}{3} \quad \begin{matrix} a = 3 \\ c = 2 \end{matrix} \quad a^2 = 9 \quad b = \sqrt{a^2 - c^2} \quad \begin{matrix} b = \sqrt{9-4} \\ b = \sqrt{5} \end{matrix}$$

$b^2 = 5 \quad TR = \frac{2b^2}{a} = \frac{2(5)}{3} = \frac{10}{3}$ Resultado: $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$



3) Hallar la ecuación de la elipse que pasa por el punto $(\frac{\sqrt{7}}{2}, 3)$ tiene su centro en el origen, su eje menor coincide con el eje "x" y la longitud de su eje mayor es el doble de la de su eje menor.

Planteamiento y desarrollo:

Si C(0,0) y eje menor coincide con eje "x", su ecuación es: $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$

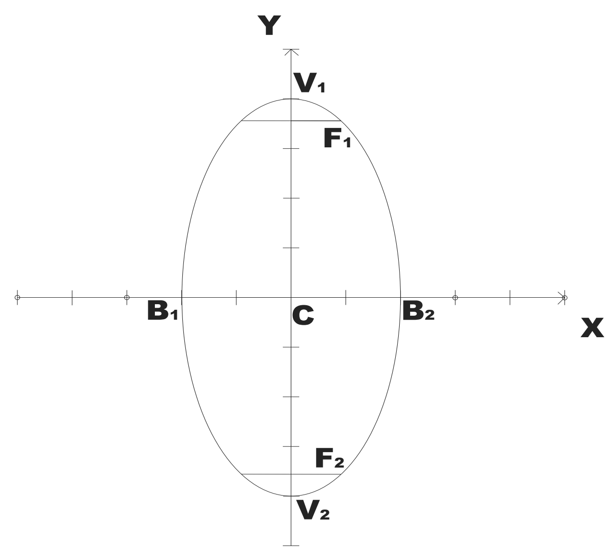
Si pasa por $(\frac{\sqrt{7}}{2}, 3)$ Sustituimos "x" y "y" en la ecuación de la elipse.

$$\frac{(\frac{\sqrt{7}}{2})^2}{b^2} + \frac{3^2}{a^2} = 1 \qquad \begin{aligned} 2a &= 2(2b) \\ a &= 4b \\ a &= 2b \end{aligned} \quad ; \quad \begin{aligned} c &= \sqrt{a^2 - b^2} \\ c &= \sqrt{16-4} \\ c &= \sqrt{12} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} LR &= \frac{2b^2}{2} \\ LR &= \frac{2(4)}{2} \\ LR &= 4 \end{aligned}$$

$$\frac{\frac{7}{4}}{b^2} + \frac{9}{(2b)^2} = 1; \quad \frac{7}{4b^2} + \frac{9}{4b^2} = 1;$$

$$\left[\frac{7}{4b^2} + \frac{9}{4b^2} = 1\right] 4b^2; \quad 7 + 9 = 4b^2; \quad 4b = 16; \quad b = 2$$

Resultado: $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1$



4) El centro de una elipse es el punto (-2,-1) y uno de sus vértices es el punto (3, -1). Si la longitud de cada lado recto es 4, hállese la ecuación de la elipse, se excentricidad y las coordenadas de sus focos.

Planteamiento y desarrollo:

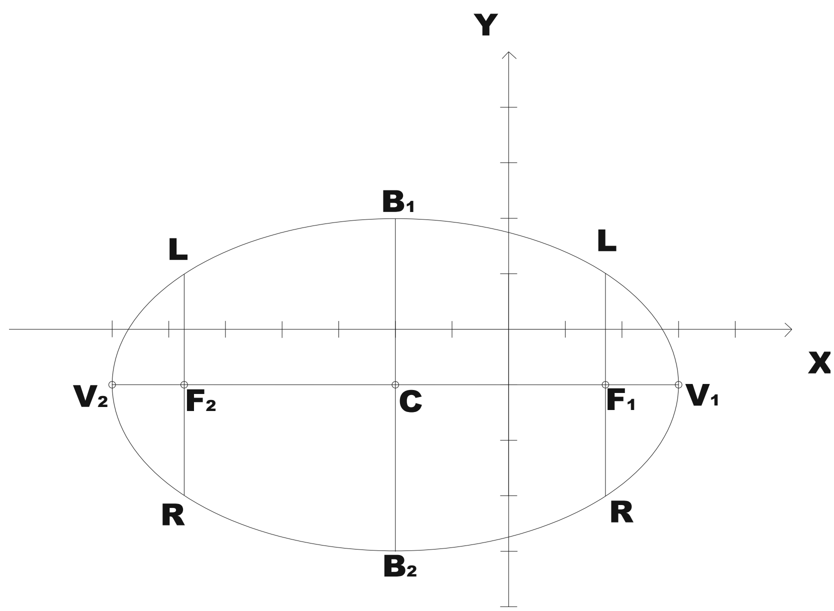
C (-2, -1); V (3, -1); a=5; $LR = 4; \quad LR = \frac{2b^2}{a}; \quad 4 = \frac{2b^2}{5}; \quad 2b^2 = 20;$

$b^2 = 10; \quad b = \sqrt{10}; \quad b = 3.1$

$c = \sqrt{a^2 - b^2}; \quad c = \sqrt{25-10}; \quad c = \sqrt{15}; \quad c = 3.8; \quad e = \frac{c}{a}; \quad e = \frac{\sqrt{15}}{5}; \quad e = 0.7$

$Coordenadas: \quad focos: F(,-C \pm h, K); \quad F_1(1.8, -1); \quad F_2(-5.8, -1).$

$EcuaciónElipse: \quad \frac{x+2}{25} + \frac{y+1}{10} = 1.$



5) Reducir la ecuación dada a la forma ordinaria de la ecuación de la elipse, determinar todos sus elementos y graficar.

$4x^2+9y^2+32x-18y+37=0$

Planteamiento y desarrollo:

$4x^2+9y^2+32x-18y+37=0;$ *Comple* tan *do el trinomio*

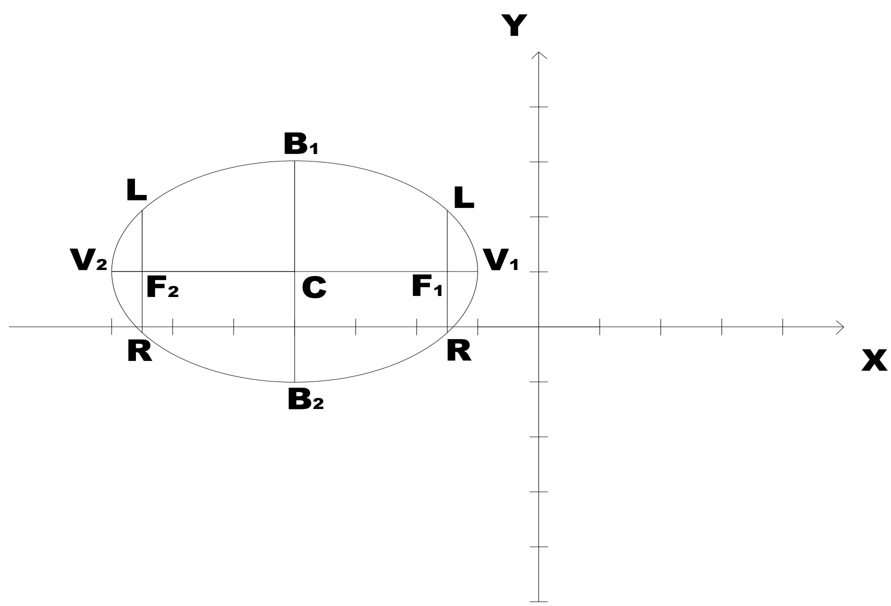
$4x^2+32+\_+9y^2-18y+\_=-37;\ 4(x^2+8x+16)+9(y^2-2y+1)=-37+64+9;$

$\frac{4(x+4)^2}{36}+\frac{9(y-1)^2}{36}=\frac{36}{36};\quad Ec.\ Elipse\quad \frac{(x+4)^2}{9}+\frac{(y-1)^2}{4}=1;\quad C\ (-4,1);\quad a^2=9$

$a=3;\quad b^2=4;\quad b=2$

$c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{9-4}=\sqrt{5};\quad LR=\frac{2b^2}{a}=\frac{2(4)}{3}=\frac{8}{3}=2.6\quad e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{5}}{3}=0.74$

Eje mayor=6 y Eje menor=4.



- **Hipérbola.**

Ejemplos.

1) Dada la hipérbola $49y^2 - 16x^2 = 196$, hallar: (a) los valores de a, b y c; (b) las coordenadas de los focos, de los vértices y de los extremos de los lados rectos; c) la longitud del lados recto y d) las ecuaciones de las asíntotas, e) Dibujar la curva

a) Reducir la ecuación a la forma ordinaria.

$$\frac{40y^2}{196} - \frac{16x^2}{196} = \frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{\frac{49}{4}} = 1$$

Por lo tanto, a= $\sqrt{4} = 2$ y $b = \sqrt{49/4} = 7/2$ Y así

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{\frac{16}{4} + \frac{49}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{65}$$

y $e = \dfrac{c}{a} = \dfrac{1}{4}\sqrt{65}$

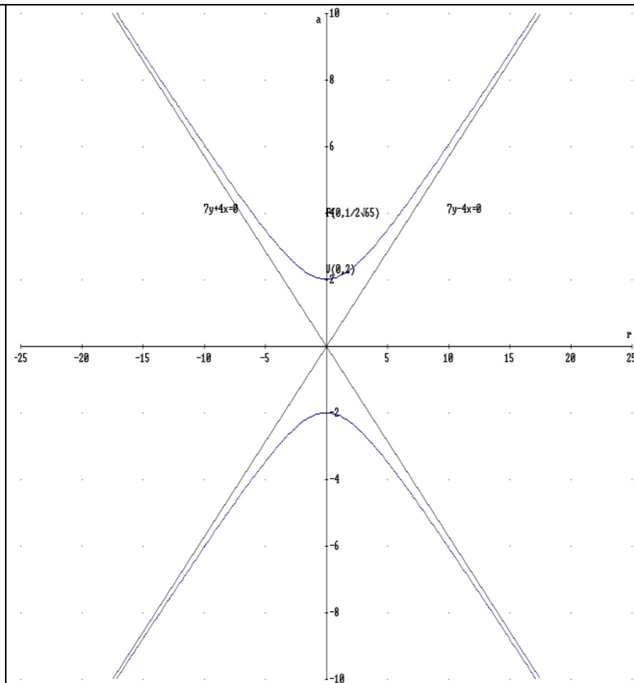
b) Como el término que contiene a y es positivo, sabemos que el eje transverso está incluido en el eje Y. Podemos ahora obtener las coordenadas de los puntos buscados:

Focos: FF´= $(0, \pm c) = (0, \pm \frac{1}{2}\sqrt{65})$

Vértices VV´= $(0, \pm a) = (0, \pm 2)$

Extremos de los latera recta

LR y L´R´= $(\pm \frac{b^2}{a}, \pm c) = (\pm \frac{49}{8}, \pm \frac{1}{2}\sqrt{65})$



c) La longitud del lado resto es $\dfrac{2b^2}{a} = \dfrac{49}{4}$

d) Las ecuaciones de las asíntotas son: 7y-4x=0 y 7y+4x=0

2) Dada la hipérbola $4x^2-9y^2-16x+18y-29=0$, determinar: a) los valores de a, b, c y e; (b) las coordenadas del centro de os focos y de los vértices; (c) las longitudes de los lateras recta y los ejes transverso y conjugado; (d) las ecuaciones de los ejes principales y de las asíntotas de la hipérbola, (e) Obtener la ecuación de la hipérbola conjugada y dibujar ambas curvas

Completando cuadrados para expresar en su forma ordinaria

$$4(x-2)^2-9(y-1)^2=36$$

$$\frac{(x-2)^2}{9}-\frac{(y-1)^2}{4}=1$$

El término que contiene a x es positivo, puesto que indica que el eje transverso es paralelo al eje X y la ecuación es de la forma

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

Entonces:

$$a=\sqrt{9}=3, b=\sqrt{4}=2$$

$$c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{13}, e=\frac{c}{a}=\frac{1}{3}\sqrt{13}$$

b) Las coordenadas del centro son (h, k)=(2,1) y, por consiguiente, los focos son FF´= $(h\pm c,k)=(2\pm\sqrt{13},1), y$ los vértices V(h+a), k)=(5,1) y V´(h-a, k)=(-1, 1)

a) Las longitudes del lado recto y los ejes transverso y conjugado son: respectivamente:

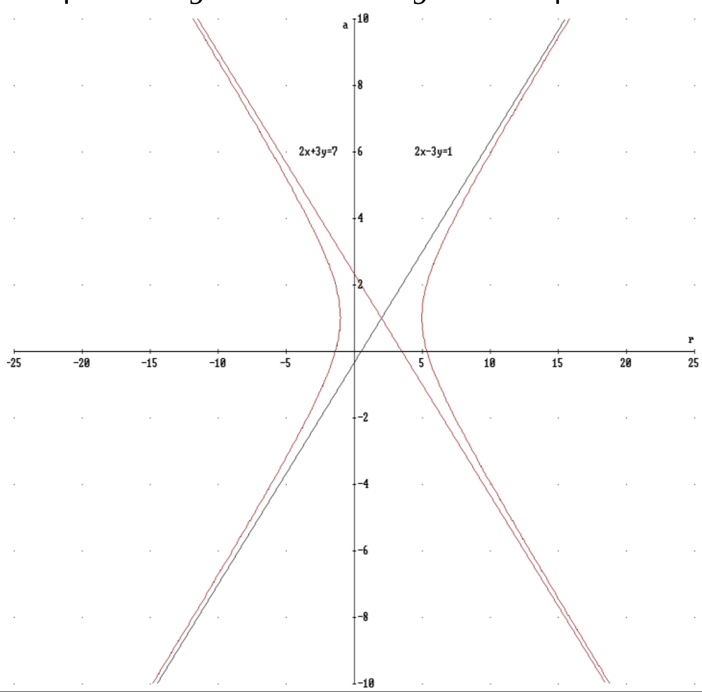
$$LR=\frac{2b^2}{a}=\frac{8}{3}$$, 2ª = 6 , 2b = 4

b) La ecuación del eje principal es y – 1 = 0. Las asíntotas son los factores del miembro izquierdo de la ecuación ordinaria igualado a cero:

$4(x-2)^2-9(y-1)^2=(2x-3y-1)(2x+3y-7)$
entonces las asíntotas serán:
2x-3y-1=0 y 2x+3y – 7=0

c) La forma ordinaria de la ecuación es:

$$\frac{(y-1)^2}{4}-\frac{(x-2)^2}{9}=1 \quad \text{o} \quad \frac{(x-2)^2}{9}-\frac{(y-1)^2}{4}=-1$$



3) Determinar la ecuación de una hipérbola con centro en (-3,2) y una distancia del centro al foco de 5 unidades. La longitud del semieje conjugado es de 3 unidades.

El problema no menciona si eje es paralelo al eje X o al eje Y, de donde

a) $\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$

b) $\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$

Para ambos casos se requiere el valor de los parámetros *a, b, h* y *k.* Se tienen los valores de *h*= -3, *k*= 2 y *b*= 3, faltando el valor del parámetro *a* , pero se sabe que la hipérbola cumple la relación $c^2 = a^2 + b^2$, entonces se puede calcular el valor de *a*

$$a^2 = c^2 - b^2$$

luego entonces $a^2 = 5^2 - 3^2 = 16$; a=4

Con este valor se tiene que:

$$\frac{(x+3)^2}{16} - \frac{(y-2)^2}{9} = 1$$

si se desarrolla

$$9(x+3)^2 - 16(y-2)^2 = (16)(9)$$

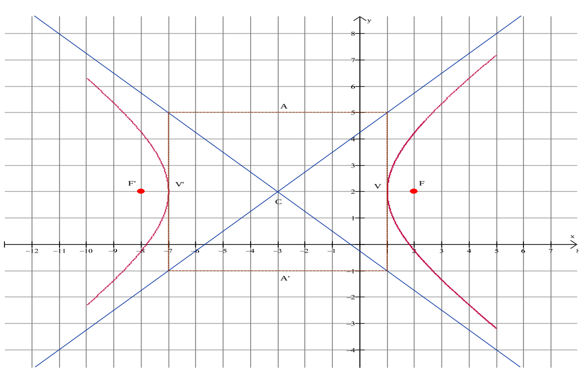
que equivale a

$$9x^2 - 16y^2 + 54x + 64y - 127 = 0$$

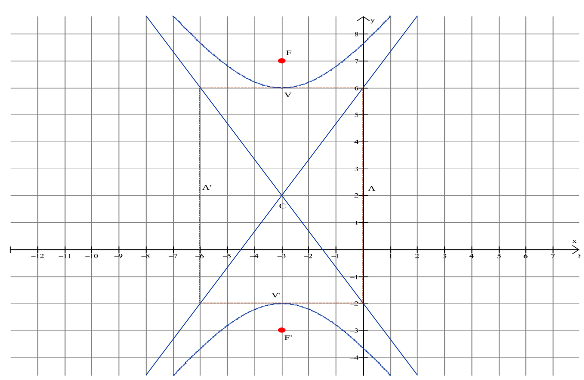
Para el caso b se obtiene la siguiente ecuación

$$-16x^2 + 9y^2 - 96x - 36y + 252 = 0$$

a)



b)



Ejercicios Propuestos.

1) Determinar la ecuación de la circunferencia, cuyo centro es **C (-4, 3)** y radio 5 m. **Sol. »** $(x+4)^2+(y-3)^2=25$ y; $x^2+y^2+8x-6y=0.$

2) Hallar la ecuación de la circunferencia de centro (5,-2) y que pasa por el punto (-1, 5).
Sol. » $(x-5)^2+(y+2)^2=85;\ x^2+y^2-10x+4y-56=0.$

3) Hallar la ecuación de la circunferencia de centro en el origen y de radio 3 m. **Sol. »** $x^2+y^2=9$ y; $x^2+y^2-9=0.$

4) Encontrar la ecuación de la circunferencia que pasa por el punto **(4, -5)** y cuyo centro está en el punto **(6, -4).**
Sol. » $(x-6)^2+(y+4)^2=5;\quad x^2+y^2-12x+8y+47=0.$

5) Hallar la ecuación de la circunferencia, en el cual, el segmento de recta que determina los puntos **(-1, 5)** y **(-5, -7)** es un diámetro.
Sol. » $(x+3)^2+(y+1)^2=40;\quad x^2+y^2+6x+2y-30=0.$

6) Encontrar la ecuación de la circunferencia cuyo centro esta a dos terceras partes de la distancia que separa el punto **(5, 5)** del punto **(-1, -7)**; el radio es de 6 m.
Sol. » $\left(x-\frac{13}{5}\right)^2+\left(y-\frac{1}{5}\right)^2=36;\quad 5x^2+5y^2-26x-2y-146=0.$

7) Hallar la ecuación de la circunferencia con **C (-4, -1)** y tangente a $3x+2y-12=0$. **Sol. »** $(x+4)^2+(y+1)^2=52;\quad x^2+y^2+8x+2y-35=0.$

8) Una circunferencia es tangente a la recta $4x+3y-4=0$, en el punto **(4, -4)** y el centro está en la recta $x-y-7=0$. Determinar su ecuación ordinaria y general.
Sol. » $(x-0)^2+(y+7)^2=25;\quad x^2+y^2+14y+24=0.$

9) Determinar la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos **(1, 2), (-3, 6)** y **(-7, 2)**.
Sol. » $(x+3)^2+(y-2)^2=16;\quad x^2+y^2+6x-4y-3=0.$

10) Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por el punto (0, 0), tenga de radio 13 y la abscisa de su centro sea -12.
Sol. » $x^2+y^2+24x\pm 10y=0.$

11) Encontrar la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos **(4, -1), (1, 2)** y **(-2, -3).**

Sol. » $\left(x-\frac{3}{4}\right)^2+\left(y+\frac{5}{4}\right)^2=\frac{170}{16};\quad 2x^2+2y^2-3x+5y-17=0.$

12) Determinar la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos **(-1, 1), (3, 5)** y **(5, 3)**.

Sol. » $\left(x-\frac{16}{5}\right)^2+\left(y-\frac{4}{5}\right)^2=\frac{442}{25};\quad 5x^2+5y^2-32x-8y-34=0.$

13) Dada la ecuación de la circunferencia; hallar el centro, el radio y su ecuación ordinaria. Además de su gráfica.

a) $2x^2+2y^2-10x+6y-15=0;$ **Sol. » c (5/2, -3/2); r=4.**

b) $x^2+y^2-8x+6y+29=0$; **Sol. » c (4, -3); r=-2i. No representa ningún lugar geométrico real.**

c) $x^2+y^2-2x+4y-4=0$;

d) $x^2+y^2+4x-10y+29=0$;

e) $x^2+y^2+6x-4y-12=0$;

f) $x^2+y^2-6x+2y+10=0$;

g) $x^2+y^2-4x-2y+1=0.$ **Sol. »** $(x-2)^2+(y-1)^2=4$; $\mathbf{C}$**(2, 1); r=2.**

h) $x^2+y^2-10x+4y-7=0$;

i) $x^2+y^2-6x+10y-2=0$; **Sol. »** $(x-3)^2+(y+5)^2=36$; $\mathbf{C}$**(3, -5); r=6.**

j $x^2+y^2-3x+5y-14=0$;

Sol. » $\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\left(y+\frac{5}{2}\right)^2=\frac{90}{4};\ \mathbf{C}\left(\frac{3}{2},-\frac{5}{2}\right)$**;** $r=\frac{\sqrt{90}}{2}$**.**

14) Una parábola cuyo vértice está en el origen y cuyo eje coincide con el eje "x", pasa por el punto (-4, 2). Hallar la ecuación de la parábola, las coordenadas del foco, la ecuación de la directriz y la longitud del lado recto.

Sol. » $y^2=-x$**; F (-1/4, 0); x=1/4 y; LR=1.**

15) Discutir la ecuación $x^2 - 4y = 0$ y trazar la curva correspondiente.
Sol. » p=1; F (0, 1); y=-1 y; LR=4.

16) Hallar la ecuación de la parábola de vértice en el origen y foco el punto (3, 0). El lado recto y la ecuación de la directriz.
Sol. » $y^2 = 12x$ **; LR=12 y; x=-3.**

17) Hallar la ecuación de la parábola de vértice en el origen, siendo su directriz la recta y-5=0. Así como sus demás elementos.
Sol. » p=-5; F (0, -5); LR=20; $x^2 = -20y.$

18) Hallar la ecuación de la parábola cuyo vértice y foco son los puntos (-4, 3) y (-1, 3), respectivamente. Hallar también las ecuaciones de su directriz y de su lado recto, trazando la gráfica correspondiente. **Sol. »** $y^2 - 6y - 12x - 39 = 0; \quad x = -7; \quad LR = 12.$

19) La directriz de una parábola es la recta y-1=0 y su foco es el punto (4, -3). Hallar la ecuación de la parábola, su lado recto y trazar la gráfica correspondiente. **Sol. »** $x^2 - 8x + 8y + 24 = 0; \quad LR = 8; \quad p = -2.$

20) Hallar la ecuación de la parábola cuyo vértice y foco son los puntos (3, 3) y (3, 1), respectivamente. Hallar también la ecuación de su directriz y la longitud de su lado recto, trazando la gráfica correspondiente. **Sol. »**

21) Verificar que la ecuación indicada represente una parábola, encontrando sus elementos y la gráfica correspondiente.

a) $9x^2 + 24x + 72y + 16 = 0$

Sol. » $\left(x - \frac{4}{3}\right)^2 = -8y; \quad p = -2; \quad LR = 8; \quad Directriz\,, \ y = 2; \quad F\left(\frac{4}{3}, -2\right)$

b) $y^2 + 4x = 7$

Sol. » $y^2 = -4\left(x - \frac{7}{4}\right); \quad p = 1; \quad LR = 4; \quad Directriz\,, \ x = \frac{11}{4}; \quad F\left(\frac{3}{4}, 0\right)$

c) $4x^2 + 12x + 48y = 159$

Sol. »

$$\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 = -12\left(y - \frac{7}{2}\right); \quad p = -3; \quad LR = 12; \quad Directriz\,, \ y = \frac{13}{2}; \quad F\left(-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

d) $2y^2+7x+12y+32=0$

Sol. »

$(y+3)^2=-\frac{7}{2}(x+2);\quad p=-\frac{7}{8};\quad LR=\frac{7}{2};\quad Directriz\,,\ x=-\frac{9}{8};\quad F\left(-\frac{23}{8},-3\right)$

e) $x^2+4x+5=y+1$

Sol. » $(x+2)^2=y;\quad p=\frac{1}{4};\quad LR=1;\quad Directriz\,,\ y=-\frac{1}{4};\quad F\left(2,\frac{1}{4}\right)$

f) $4y^2-48x-20y=71$

Sol. » $\left(y-\frac{5}{2}\right)^2=12(x+2);\quad p=3;\quad LR=12;\quad Directriz\,,\ x=-5;\quad F\left(1,\frac{5}{2}\right)$

22) Hallar la ecuación de la parábola que pasa por los puntos (0, 6), (4, -2) y (6, -3) y cuyo eje focal es paralela al eje "y". Así como sus demás elementos y la gráfica correspondiente.

Sol. » $x^2-12x-4y+24=0;\quad (x-6)^2=4(y+3);\quad p=1;\quad LR=4;$
$Directriz\,,\ y=-4;\quad F(6,-2)$

23) Hallar la ecuación de la parábola que pasa por los puntos (6, 7), (7/2, -3) y (8, 3), cuyo eje focal es paralela al eje "x". Así como sus demás elementos y la gráfica correspondiente.

Sol. » $y^2+x-6y-55=0;\quad (y-3)^2=-8(x-8);\quad p=-2;\quad LR=8;$
$Directriz\,,\ x=10;\quad F(6,3)$

24) Hallar la ecuación de la parábola que pasa por los puntos (7, 17), (1, 5) y (7, -7), cuyo eje focal es paralela al eje "x". Así como sus demás elementos y la gráfica correspondiente.

Sol. » $x^2-12x-4y+24=0;\quad (x-6)^2=4(y+3);\quad p=1;\quad LR=4;$
$Directriz\,,\ y=-4;\quad F(6,-2)$

25) Para cada uno de los ejercicios, hallar las coordenadas de los focos, los extremos de los ejes mayor y menor, los extremos de cada lado recto y graficar.

a) $\frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{25}=1$ Sol: F $(\pm\sqrt{24},0)$, $V(\pm 7,0)$ $B(0,\pm 5)$ $\left(\sqrt{24},\frac{25}{7}\right)$,

b) $\frac{y^2}{25}+\frac{x^2}{9}=1$ Sol: F $(0,\pm 4)$, V $(0,\pm 5)$ $B(\pm 3,0)$ $(\pm\frac{9}{5},4),(\pm\frac{9}{5},-4)$

c) $x^2+4y^2=4$ Sol: F$(\pm\sqrt{3},0)$, V$(\pm 2,0)$ $B(0,\pm 1)$ $(\sqrt{3},\pm\frac{1}{2}),(-\sqrt{3},\pm\frac{1}{2})$

d) $2x^2+3y^2=18$ Sol: $F(\pm\sqrt{3},O),V(\pm 3,0)$ $B(0\pm\sqrt{6})$ $(\sqrt{3},\pm 2),(-\sqrt{3},\pm 2)$

e) $\frac{(x-3)^2}{16}+\frac{(y-2)^2}{9}=1$ Sol: $F(3\pm\sqrt{7}),V(3\pm 4,2)$ $B(3,2\pm 3)$

$(3+\sqrt{7},2\pm\frac{9}{4}),(3-\sqrt{7},2\pm\frac{9}{4})$

26) Reducir la ecuación y graficar.

a) $16x^2+25y^2+160x+200y+400=0$ Sol: $\frac{(x+5)^2}{25}+\frac{(y+4)^2}{16}=1$

b) $16x^2+4y^2+32x-16y-32=0$ Sol. $\frac{(x+1)^2}{4}+\frac{(y-2)^2}{16}=1$

c) $3x^2+2y^2+24x-12y+60=0$ Sol: $\frac{(x+4)^2}{2}+\frac{(y-3)^2}{3}=1$

27) Escribe la ecuación de la elipse que satisface las condiciones dadas en cada uno de los ejercicios.

a) Centro en (5,1) vértice en (5,4), extremo de su eje menor (3,1). Sol: $\frac{(x-5)^2}{4}+\frac{(y-1)^2}{4}=1$

b) Vértice en (-1,3) y (5,3), la longitud del eje menor es 4.
Sol: $\frac{(x-2)^2}{9}+\frac{(y-3)^2}{4}=1$

c) Centro en (-2,2), un vértice en (-2,6), extremo en un eje menor (0, 2). Sol: $\frac{(y-2)^2}{16}+\frac{(x-2)^2}{4}=1$

28) Hallar las ecuaciones de las hipérbolas que satisfacen las condiciones siguientes:

a) Eje real 8, focos ($\pm 5,0$) **Sol. $9x^2-16y^2=144$**

b) Centro (0,0), un foco (8,0), un vértice (6,0).
Sol. $7x^2-9y^2=252$

29) Hallar la ecuación de la hipérbola de centro el origen, eje real sobre el eje de coordenadas y, longitud del lado recto 36 y distancia entre los focos igual a 24. **Sol. 3y² -x² = 108**

30) Hallar la ecuación de la hipérbola de vértices $(\pm 6{,}0)$ y asíntotas 6y = +7x. **Sol. 49x² - 36y² = 1.764**

31) Hallar las ecuaciones de las hipérbolas cuyos focos y vértices son:

$a)\ (\pm 3{,}0), VV' = (\pm 2{,}0);$

$b)\ FF' = (0,\pm 1), VV' = (0,\pm \frac{1}{2});$

$(c) F' = (-5{,}1), F = (7{,}1); V'(-3{,}1), V = (5{,}1)$

Sol. $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1;\quad 12y^2 - 4x^2 = 3;\quad \frac{(x-1)^2}{16} - \frac{(y-1)^2}{20} = 1$

32) Determinar las ecuaciones de las hipérbolas conjugadas de:

$a)\ 4x^2 - 9y^2 = 36; (b)\ x^2 - y^2 = 1; (c)\ y^2 - x^2/4 = 1; (d) 9y^2 - x^2 + 8x - 7 = 0$

Sol. $a)\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{9} = 1;\quad b) y^2 - x^2 = 1;\quad c)\frac{x^2}{4} - y^2 = 1;\quad d)\frac{(x-4)^2}{9} - y^2 = 1$

32) Escribir la ecuación de la hipérbola cuyos focos están situados simétricamente con respecto al origen sobre el eje X, tal que satisfaga las siguientes condiciones:

a) 2a= 10, 2b = 8
b) La distancia entre los focos es 10 unidades y el eje conjugado mide 8 unidades.
c) La excentricidad es 3/2 y 2c = 6
d) El eje transverso mide 10 unidades y e = 5/4

Sol. $a)\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{16} = 1;\quad b)\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1;\quad c)\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1;\quad d)\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{36} = 1$

RAP 3. Resuelve problemas que involucren ecuaciones de segundo grado, en situaciones académicas y sociales.

Ejemplos.

1) La altura de un arco semicircular, medida a un metro de su extremo es de 7 m., ¿cuál será su altura máxima?

Planteamiento:

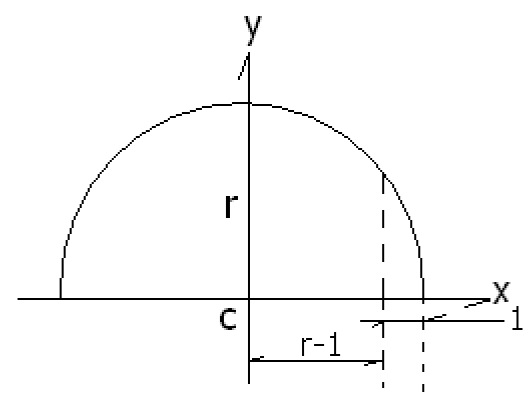
$x^2 + y^2 = r^2.$

Desarrollo:

$(r-1)^2 + 7^2 = r^2; \quad r^2 - 2r + 1 + 49 = r^2;$

$r^2 - r^2 - 2r + 50 = 0; \quad 2r = 50;$

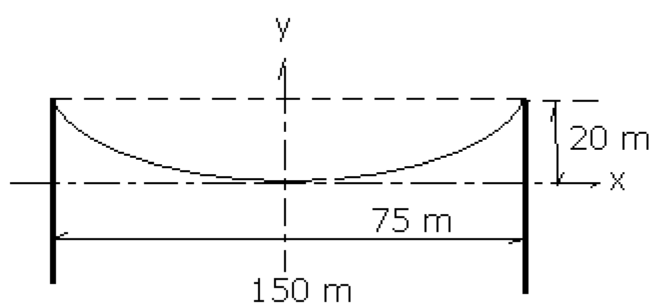
$r = \frac{50}{2}; \quad r = 25.$



2) Determinar la ecuación del arco parabólico formado por los cables que soportan un puente colgante cuando el claro es de 150 m., y la depresión de 20 m.

$$x^2 = 4py; \quad (75)^2 = 4p(20); \quad 5625 = 80p; \quad p = \frac{5625}{80}; \quad p = \frac{1125}{16}.$$

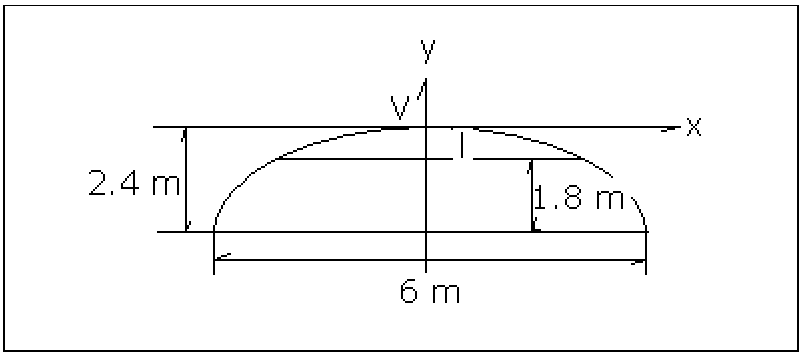
$$x^2 = 4\left(\frac{1125}{16}\right)y; \quad x^2 = \frac{1125}{4}y.$$



3) Un arco de forma parabólica mide 6 m de largo en su base, su vértice está a 2.4 m arriba de la misma. Hállese la longitud de una viga paralela a la base y 1.8 m arriba de la misma.

$$x^2 = -4py; \quad (3)^2 = -4p(-2.4); \quad 9 = -9.6p; \quad p = -\frac{9}{9.6}; \quad p = -\frac{15}{16}.$$

$$x^2 = 4\left(-\frac{15}{16}\right)(-0.6); \quad x = \sqrt{\frac{9}{4}}; \quad x = \frac{3}{2}. \quad \therefore \quad l = 2x; \quad l = 2\left(\frac{3}{2}\right); \quad l = 3\ m.$$



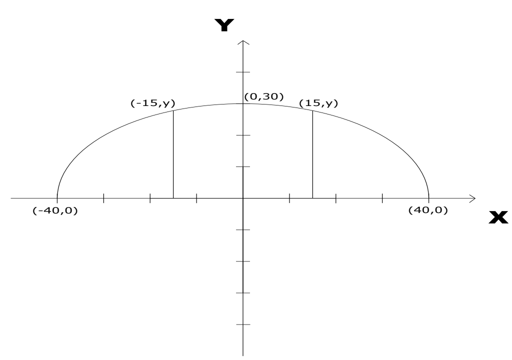
4) Un arco de 80m de luz tiene forma semielíptica. Sabiendo que su altura es de 30 metros hallar la altura del arco en un punto situado a 15m del centro.

Planteamiento y desarrollo:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1; \quad \frac{x^2}{1600} + \frac{y^2}{900} = 1; \quad \frac{225}{1600} + \frac{y^2}{900} = 1$$

$$\frac{y^2}{900} = 1 - \frac{225}{1600}; \quad \frac{y^2}{900} = \frac{1375}{1600}; \quad y^2 = (\frac{1375}{1600})900.$$

$$y^2 = \frac{1237500}{1600}; \ y = \sqrt{\frac{12375}{16}}; \ y = \frac{\sqrt{12375}}{4}; \ y = \frac{15\sqrt{55}}{4}; \ y = 27.81m$$



Intégrate a un equipo de trabajo de 3 o 4 compañeros, para observar y argumentar el desarrollo de este ejemplo guiado, que es de mayor complejidad.

5) Hallar el lugar geométrico de los puntos cuyo producto de distancias a las rectas 4x – 3x + 11 = 0 y 4x + 3y + 5 = 0 sea igual a $\frac{144}{25}$

Sea P(x, y) un punto cualquiera

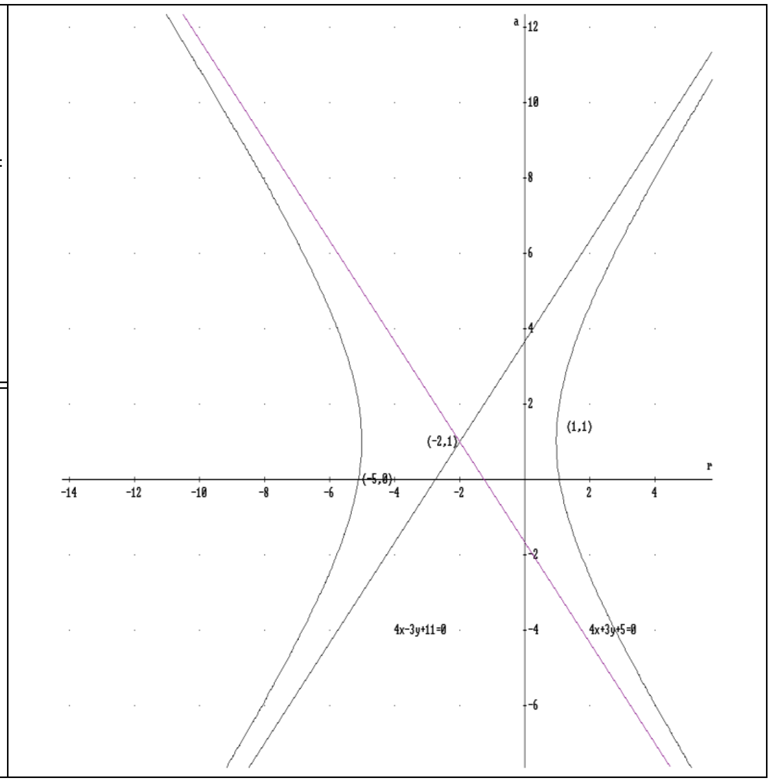
$$\left(\frac{4x-3y+11}{-5}\right)\left(\frac{4x+3y+5}{-5}\right) =$$

Simplificando

$$16x^2 - 9y^2 + 64x + 18y - 89 =$$

$$obien$$

$$\frac{(x+2)^2}{9} - \frac{(y-1)^2}{16} = 1$$



Ejercicios Propuestos.

1) Hallar la longitud de la circunferencia cuya ecuación es $25x^2+25y^2+30x-20y-62=0$. **Sol. »** p=10.88 u.

2) Hallar el área del círculo cuya ecuación es $9x^2+9y^2+72x-12y+103=0$. **Sol. »** $A=5\pi\ u^2$.

3) Escribir la ecuación del círculo en el cual el segmento de recta que determina los puntos (-1, 5) y (-5, -7) es un diámetro. **Sol. »** $x^2+y^2+6x+2y-30=0$.

4) Hallar la ecuación de la circunferencia inscrita en el triángulo, cuyos lados son las rectas; $2x-3y+21=0$, $3x-2y-6=0$ y $2x+3y+9=0$. **Sol. »** $(x+1)^2+(y-2)^2=13$; $x^2+y^2+2x-4y-8=0$.

5) El centro de una circunferencia esta en **(-2, 4)** y pasa por la intersección de $4x+-7y+10=0$ y $3x+2y-7=0$. Hallar la ecuación ordinaria y general de dicha circunferencia.
Sol. » $(x+2)^2+(y-4)^2=13$; $x^2+y^2+4x-8y+7=0$.

6) Una cuerda de la parábola $y^2-4x=0$ es un segmento de la recta **x-2y+3=0.** Hallar su longitud. **Sol. »**

7) Hallar la longitud de la cuerda focal de la parábola $x^2+8y=0$ que es paralela a la recta $3x+4y-7=0$. **Sol. »**

8) Encontrar la ecuación del diámetro de la circunferencia, cuya ecuación es $(x-2)^2+(y+1)^2=16$. **Sol. »**

9) Determinar la longitud de la cuerda de la circunferencia $(x-2)^2+(y-4)^2=10$, que se divide por la mitad en el punto **(1, 2)**.
Sol. »

10) Hallar la longitud del radio vector del punto de la parábola $y^2-9x=0$, cuya ordenada es igual a 6. **Sol. »**

11) La directriz de una parábola es la recta x+5=0 y su vértice es el punto (0, 3). Hallar la ecuación de la parábola, su lado recto y trazar la gráfica correspondiente. **Sol. »**

12) Una cuerda de la parábola $y^2 - 4x = 0$ es un segmento de la recta **x-2y+3=0.** Hallar su longitud. **Sol. »**

13) Hallar la longitud de la cuerda focal de la parábola $x^2 + 8y = 0$ que es paralela a la recta $3x + 4y - 7 = 0$.
Sol. »

14) Hallar la longitud del radio vector del punto de la parábola $y^2 - 9x = 0$, cuya ordenada es igual a 6.
Sol. »

15) La órbita de la tierra es una elipse con el sol en uno de los focos. La longitud del eje mayor es 186 000 000 mi y la excentricidad es o.o167. Hallar las distancias de los extremos del eje mayor al sol.
Sol: 91.4 millones de millas y 94.6millones de millas.

16) El arco de un paso subterráneo es una semielipse de 60 pies de ancho y 20 pies de altura. Hallar el claro de la orilla de un carril si la orilla esta a 20 pies del punto medio.

Sol: $\frac{20}{3}\sqrt{5}\,pies$

17) Hallar la ecuación de la trayectoria de un punto P(x, y) que se mueve de tal manera que su distancia a (-4, 0) es igual a dos tercios de la distancia de la recta x=-9

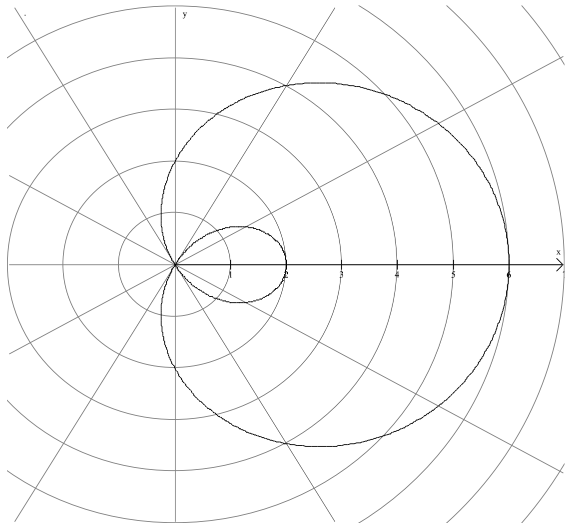
Sol: $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{20} = 1$

18) Hallar el lugar geométrico de los puntos cuyo producto de las pendientes de las rectas que los une con los puntos fijos (-2,1) y (3,2) es igual a 4, representa una hipérbola.
Sol: $4x^2-y^2-4x+3y-26=0$

19) Dada la hipérbola $16x^2 - 9y^2 = -144$, hallar: a) las longitudes de los semiejes; b) las coordenadas de los focos; c) la excentricidad, d) las ecuaciones de las asíntotas.

Sol. $a)\ a = 4, b = 3.\ b)\ F, F' = (\pm 5,0).\ c)\ e = \frac{5}{3}.\ d)\ y = \pm\frac{4}{3}x.$

Unidad 3. Coordenadas Polares y Ecuaciones Paramétricas.



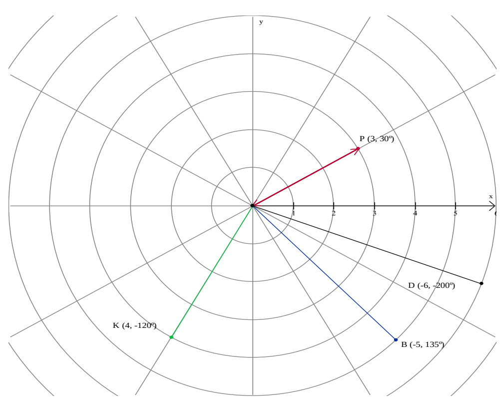
Competencia Particular. Transforma las ecuaciones de lugares geométricos a los diferentes sistemas de coordenadas, transitando de cartesianas a polares o paramétricas y viceversa en situaciones académicas.

RAP 1. Obtiene lugares geométricos mediante la localización de puntos en el plano polar.

3.1.1. Lugares Geométricos, para las Coordenadas Polares.

Ejemplos. *Trazar los puntos y las ecuaciones dadas en el sistema polar.*

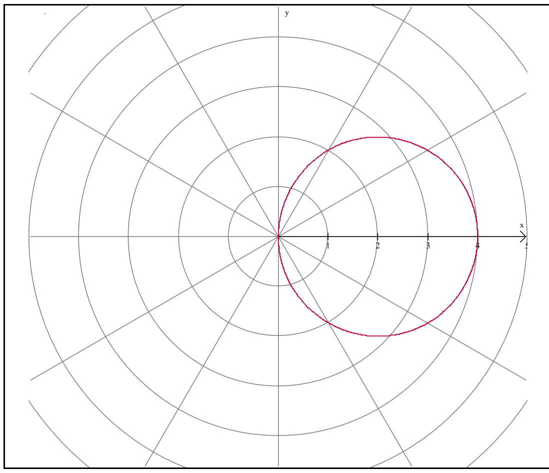
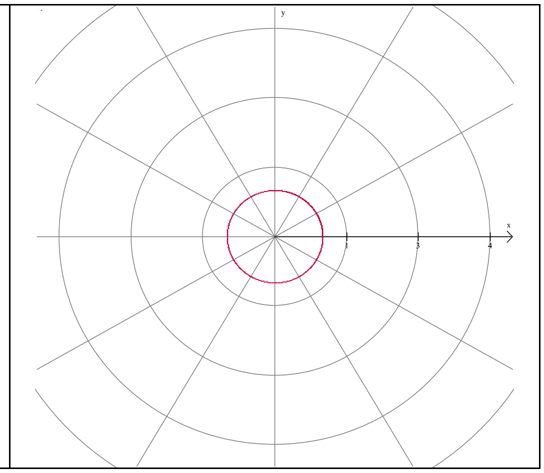
1) $P(3, 30^\circ)$; 2) $B(-5, 135^\circ)$; 3) $K(4, -120^\circ)$ y; 4) $D(-6, -200^\circ)$.



5) $r = 4\cos\theta \quad y\,;$ 6) $r = \dfrac{1}{1 + sen\,\theta}.$

$Si\ \theta = 0^{\circ} \quad \therefore r = 4; \quad \theta = 90^{\circ} \quad \therefore r = 0; \quad \theta = 30^{\circ} \quad \therefore r = 3.5; \quad \theta = 60^{\circ} \quad \therefore r = 2$

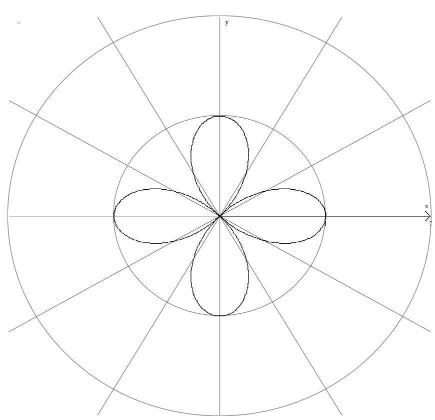
$Si\ \theta = 0^{\circ} \quad \therefore \quad r = 1; \quad \theta = 90^{\circ} \quad \therefore \quad r = 0.5; \quad \theta = 180^{\circ} \quad \therefore \quad r = 1;$

Intégrate a un equipo de trabajo de 3 o 4 compañeros, para observar y argumentar el desarrollo de este ejemplo guiado, que es de mayor complejidad.

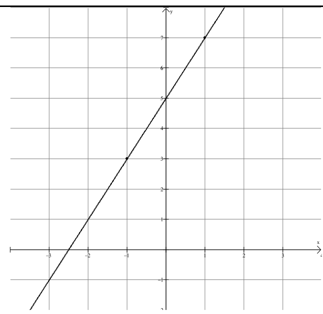
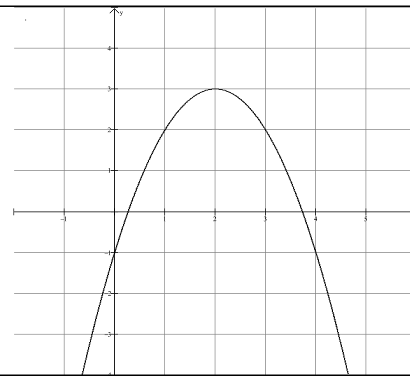
7) $r = sen\ 2\,\theta$

$si\ \theta = 0^{\circ} \therefore r = 0; \quad si\ \theta = 45^{\circ} \therefore r = 1\ y; \quad si\ \theta = 90^{\circ} \therefore r = 0. \quad etc.$



3.1.2. Lugares Geométricos, para las Ecuaciones Paramétricas.

Ejemplos. Trazar la gráfica de las siguientes ecuaciones paramétricas.

1)	**2)**
$x = t - 1; \quad y \quad y = 2t + 3$ $t = 0 \quad \therefore \quad x = -1 \quad y \quad y = 3$ $t = 2 \quad \therefore \quad x = 1 \quad y \quad y = 7$	$x = 2 + t; \quad y \quad y = 3 - t^2$ $t = -2 \quad \therefore \quad x = 0 \quad y \quad y = -1$ $t = 0 \quad \therefore \quad x = 2 \quad y \quad y = 3$ $t = 2 \quad \therefore \quad x = 4 \quad y \quad y = -1$
	

Ejercicios. *Trazar los puntos y las ecuaciones dadas en el sistema polar.*

1) $A(6, 60^\circ)$ 2) $B(-4, 120^\circ)$ 3) $K(6, -220^\circ)$ y; 4) $D(-6, -300^\circ)$.

5) $r = 3 + sen\,\theta$; 6) $r = \dfrac{2}{2 + 2sen\,\theta}$.

7) $r = 2 + 4\cos\theta$; 8) $r^2 = 9sen\,2\theta$.

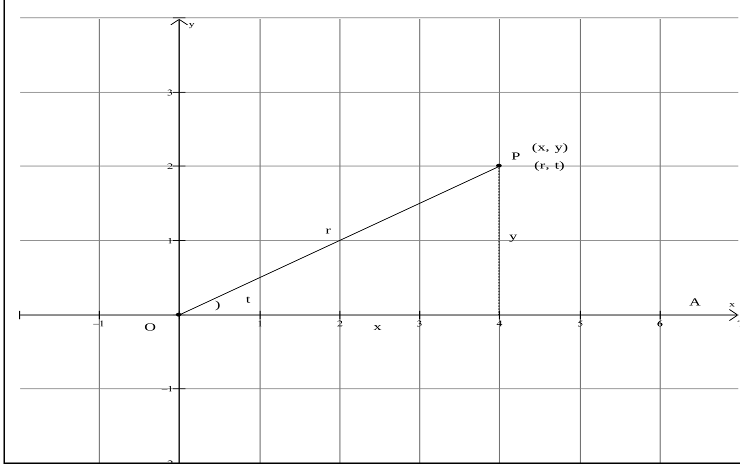
RAP 2. Trasforma ecuaciones paramétricas a la forma cartesiana y viceversa, en situaciones académicas.

3.2.1. Relaciones Entre Coordenadas Polares y Rectangulares.

Para un lugar geométrico determinado, conviene, frecuentemente, saber transformar la ecuación polar en ecuación rectangular y recíprocamente. Para efectuar tal transformación debemos conocer las relaciones que

existen entre las coordenadas rectangulares y las coordenadas polares de cualquier punto del lugar geométrico.
Se obtienen relaciones simples cuando el polo y el eje polar se hacen coincidir, respectivamente, con el origen y la parte positiva del eje "x", tal como se indica en la figura.

Sea un punto cualquiera, que tenga por coordenadas rectangulares (x, y) y por coordenadas polares (r, θ).



$$sen\ \theta = \frac{y}{r}; \quad y = r\ sen\ \theta.$$

$$\cos\theta = \frac{x}{r}; \quad x = r\cos\theta.$$

$$tg\ \theta = \frac{y}{x}; \quad \theta = tg^{-1}\frac{y}{x}.$$

$$r^2 = x^2 + y^2.$$

Ejemplos. *Transformar las ecuaciones polares a rectangulares y viceversa. Así como trazar las gráficas en el sistema correspondiente.*

1) $r = \dfrac{2}{\cos\theta + 3\ sen\,\theta}$.

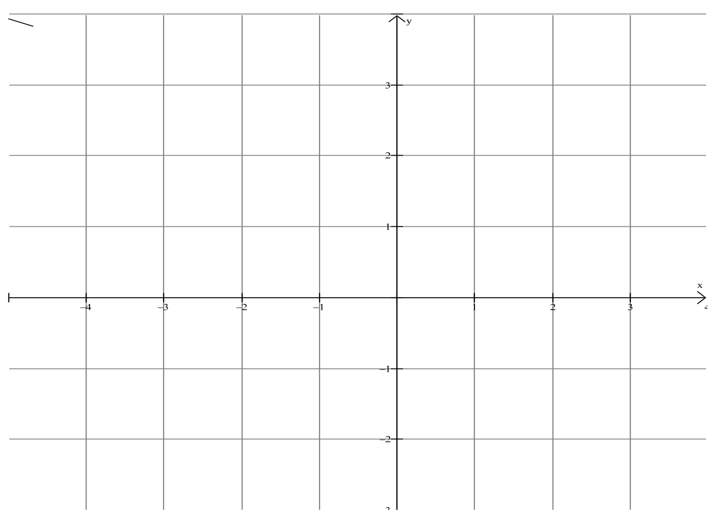
PLANTEAMIENTO Y DESARROLLO:

$$sen\ \theta = \frac{y}{r}; \quad \cos\theta = \frac{x}{r}.$$

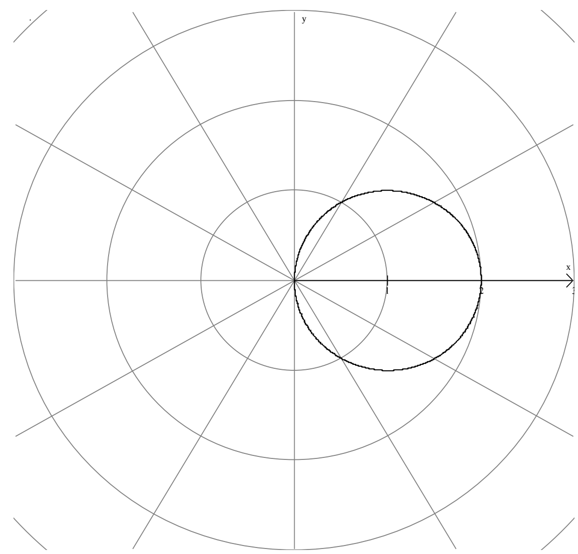
$$r = \frac{1}{\frac{x}{r} + \frac{3y}{r}}; \quad r = \frac{1}{\frac{x+3y}{r}};$$

$$r = \frac{r}{x+3y}; \quad x + 3y = \frac{r}{r};$$

$$x + 3y = 1.$$



2) $x^2 + y^2 - 2x = 0$

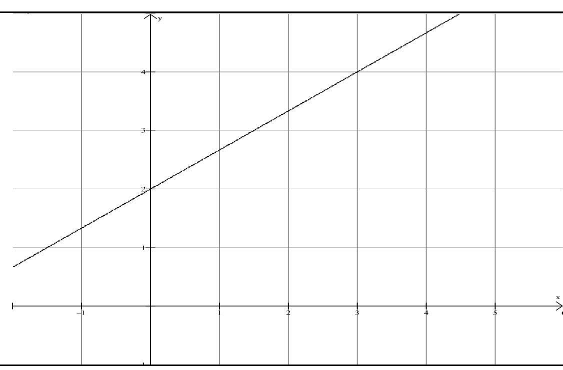
PLANTEAMIENTO Y DESARROLLO:	
$sen\ \theta = \frac{y}{r}; \quad y = r\ sen\ \theta.$ $\cos\theta = \frac{x}{r}; \quad x = r\ \cos\theta.$ $(\cos\theta)^2 + (sen\ \theta)^2 = 2\ r\ \cos\theta;$ $r^2\ \cos^2\theta + r^2\ sen^2\ \theta = 2\ r\ \cos\theta;$ $r^2\ (\cos^2\theta + sen^2\ \theta) = 2\ r\ \cos\theta;$ $\frac{r^2}{r} = 2\ \cos\theta; \quad r = 2\ \cos\theta.$	

3) Hallar la ecuación rectangular de la curva, cuyas ecuaciones paramétricas son: (trazar las gráficas correspondientes).

a) Planteamiento y Desarrollo:

$x = 3tg^2\theta \quad y \quad y = 2\sec^2\theta. \quad tg^2\theta = \frac{x}{3} \quad ; \quad \sec^2\theta = \frac{y}{2}; \quad como\ \sec^2\theta - tg^2\theta = 1$

$por\ la\ identidad\ trigonométrica. \quad \therefore \quad \frac{y}{2} - \frac{x}{3} = 1; \quad (2)(3); \quad 3y - 2x - 6 = 0.$



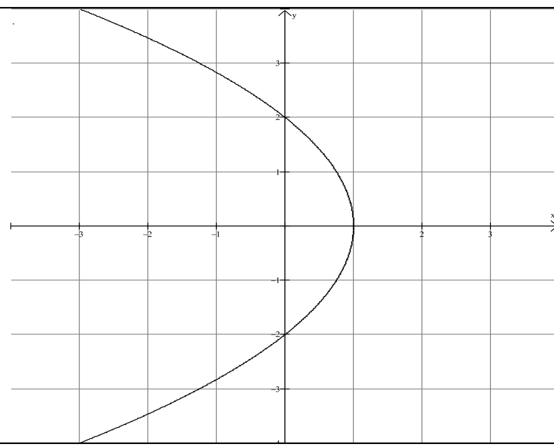
b) Planteamiento y Desarrollo:

$x=\cos^2\theta\,;\; y=2\,sen\,\theta.\;\cos^2\theta = x;\; sen\,\theta=\dfrac{y}{2};\; sen^2\theta=\dfrac{y^2}{4};\; como\;\; sen^2\theta+\cos^2\theta=1;$

$por\;\; la\;\; identidad\;\; trigonométrica;\quad \therefore\quad \dfrac{y^2}{4}+x=1;\quad \dfrac{y^2+4x}{4}=1;\quad y^2+4x=4;$

$y^2=-4x+4;\quad y^2=-4(x-1);\quad LR=4p;\quad LR=4;\quad 4p=-4;\quad p=-\dfrac{4}{4};\quad p=-1;$

$h=4\quad y\quad k=0.$



Ejercicios.

1) Hallar las coordenadas rectangulares del punto P cuyas coordenas polares son; (4, 120°). **Sol. » x=-2** y **y=2** $\sqrt{3}$.

2) Hallar un par de coordenadas polares del punto P cuyas coordenadas rectangulares son (3,-5). **Sol. »** r= $\pm\sqrt{34}$; » Θ =300° 58´.

3) Hallar la ecuación polar del lugar geométrico cuya ecuación rectangular es $x^2+y^2-4x-2y+1=0$ **Sol.** r^2-4rcosΘ -2rsenΘ +1=0.

4) Pasar la ecuación rectangular dada a su forma polar. $2x^2+2y^2+2x-6y+3=0$. **Sol. »** $2r^2+$2 r cosΘ - 6 r senΘ +3=0.

5) Pasar la ecuación rectangular dada a su forma polar $x^2+y^2-2y=0$. **Sol. »** r^2-2 rsenΘ =0.

6) Hallar la ecuación rectangular del lugar geométrico cuya ecuación polar es: $r = \dfrac{2}{1-\cos\phi}$ **Sol. »** $y^2 = 4x + 4$.

7) Hallar la ecuación rectangular del lugar geométrico cuya ecuación polar es : $r = \dfrac{2}{2-\cos\phi}$ **Sol. »** $\underline{3x^2 + 4y^2 - 4x - 4 = 0}$.

8) Hallar la ecuación rectangular del lugar geométrico cuya ecuación polar es: r = 2(1-cosΘ). $4(x^2 + y^2) = (x^2 + y^2 + 2x)$

9) Escribir la ecuación siguiente en coordenadas rectangulares e identificar la curva. $r = \dfrac{1}{1-2sen\phi}$ $x^2 - 3y^2 - 44 - 1 = 0$

10) Hallar las coordenadas rectangulares del punto determinado por las coordenadas polares (6,120°). **Sol:** (-3, 3$\sqrt{3}$).

11) Expresa las coordenadas rectangulares (-2 , 2) en términos de coordenadas polares. **Sol: (2$\sqrt{2}$, 45°).**

12) Transformar la ecuación r = 4senΘ a coordenadas rectangulares. **Sol:** $x^2 + y^2 = 4y$.

13) Trasformar la ecuación en coordenadas polares a rectangulares: $r = \dfrac{1}{\cos\phi + 3sen\phi}$ **Sol: x + 3y = 1.**

14) Transformar las ecuaciones siguientes a las correspondientes ecuaciones en coordenadas polares.

$2x + y = 3$ **Sol:** $r = \dfrac{3}{2\cos\phi + sen\phi}$

$3x + y = 0$ **Sol:** $r(3\cos\phi - sen\phi) = 0$

$x^2 = 4y$ **Sol:** $r\cos^2\phi = 4sen\phi$

$x^2 + y^2 = 9$ **Sol:** $r = 3$

$x^2 - 9y = 0$ **Sol:** $r\cos^2\phi - 9sen\phi = 0$

$x^2 - 2y^2 = 4$ **Sol:** $r^2(1 - 3sen^2\phi) = 4$

$x^2 + y^2 = 2y$ **Sol:** $r = 2sen\phi$

15) Transformar las ecuaciones a las correspondientes ecuaciones en coordenadas rectangulares.

$r\cos\phi = 4$	**Sol:** $x = 4$
$r = 6\cos\phi$	**Sol:** $x^2 + y^2 = 6x$
$r = 8sen\,\phi$	**Sol:** $x^2 + y^2 = 8y$
$r = \dfrac{2}{1-\cos\phi}$	**Sol:** $y^2 = 4(x+1)$
$r = \dfrac{3}{3sen\,\phi + 4\cos\phi}$	**Sol:** $4x + 3y = 3$
$r = \dfrac{2}{1+2sen\,\phi}$	**Sol:** $x^2 - 3y^2 + 8y = 4$

3.2.2. Ecuaciones Polares de la Recta, la Circunferencia y las Cónicas.

• **Ecuación de la Recta.** $p = r\cos(\theta - \omega)$**.**

1) Si **ω=0°** » **p = r cosθ** y la recta es ⊥ al eje polar y a **p** unidades a la derecha del origen.

2) Si **ω=180°** » **-p = r cosθ** y la recta es ⊥ al eje polar y a **p** unidades a la izquierda del origen.

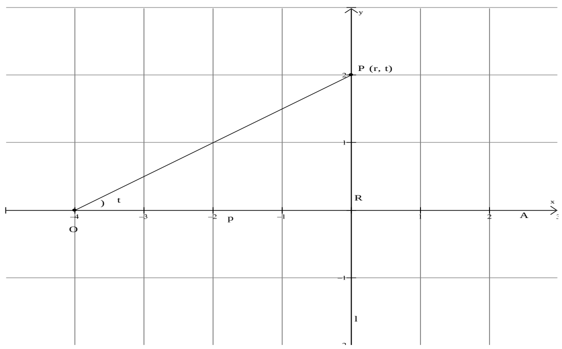
3) Si **ω=90°** » **p = r senθ** y la recta es ∥ al eje polar y a **p** unidades arriba del origen.

4) Si **ω=270°** » **-p = r senθ** y la recta es ∥ al eje polar y a **p** unidades debajo del origen.

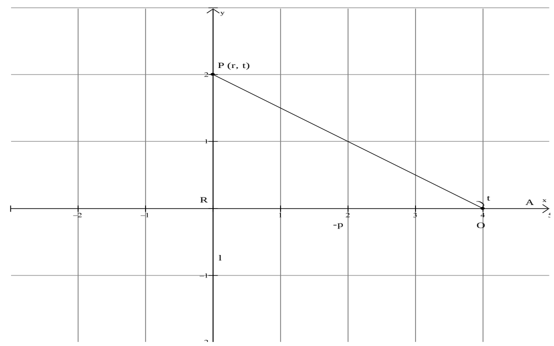
Ejemplos.

1) Basándose de una figura hállese la ecuación de la recta ⊥ al eje polar.
a) 4u a la derecha del polo.
b) 4u a la izquierda del polo.

a) si ω=0° » p=r cosθ;   r cosθ=4



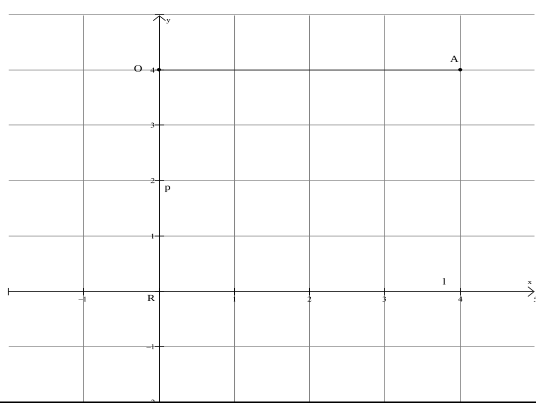
b) si ω=0° » -p=r cosθ;   r cosθ=-4



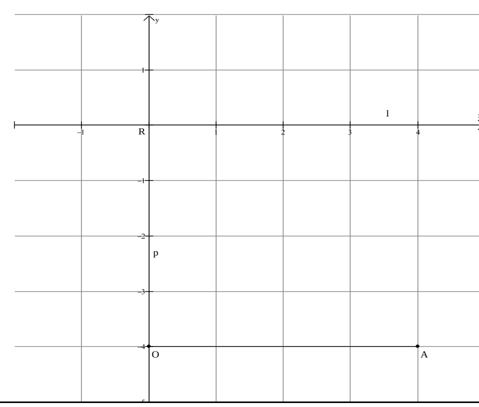
2) Basándose de una figura hállese la ecuación de la recta ‖ al eje polar.

a) 4u debajo del eje.
b) 4u arriba del eje.

a) si ω=270° » -p=r senθ;   r senθ=-4



b) si ω=90° » p=r senθ;   r senθ=4



Si una recta no pasa por el origen, puede deducirse a.

$$r = \frac{c}{A\cos\theta + B\ sen\ \theta}.$$

Esto es, si Ax + By = C cuando C ≠ 0 y A y B ambas no igual a cero.

Ejemplos.

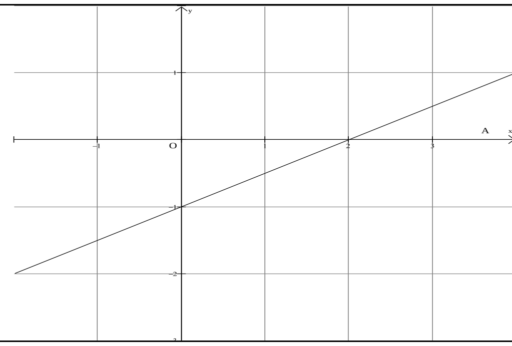
1) Trazar la gráfica de la ecuación polar y encontrar la ecuación rectangular correspondiente.

Planteamiento y Desarrollo:

$$r = \frac{4}{2\cos\theta - 4\,sen\,\theta}; \quad A = 2;$$

$$B = -4 \ y \quad C = 4. \quad \therefore$$

$$2x - 4y = 4.$$



2) Escribir la ecuación polar de la recta horizontal que pasa por el punto (3, 90°).

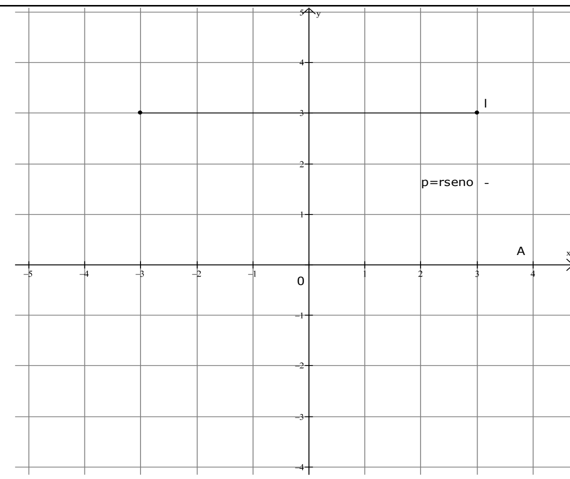
Planteamiento y Desarrollo:

$$r = \frac{C}{A\cos\theta + B\,sen\,\theta}; \quad r = 3;$$

$$\theta = 90° \quad \therefore \quad \cos 90° = 0\,;$$

$$sen\ 90° = 1 \quad \therefore$$

$$r = \frac{C}{B}.$$



• **Ecuación de la Circunferencia.** $a^2 = r^2 + c^2 - 2\,c\,r\cos(\theta - \alpha)$. O bien

$$r^2 - 2\,c\,r\cos(\theta - \alpha) + c^2 = a^2$$

1) Si la circunferencia pasa por el polo y su centro está sobre el eje polar, su ecuación es de la forma $r = \pm 2\,a\cos\theta$; debiéndose tomar el signo positivo o el negativo según que el centro esté a la derecha o a la izquierda del polo.

2) Si la circunferencia pasa por el polo y su centro está sobre el eje polar, su ecuación es de la forma $r = \pm 2\, a \cos\theta$; debiéndose tomar el signo positivo o el negativo según que el centro esté a la derecha o a la izquierda del polo.

Ejemplos.

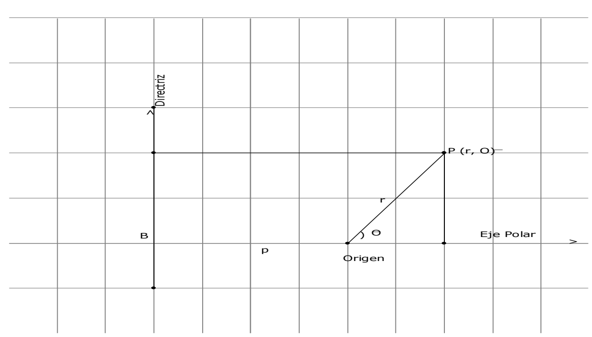
1) Hallar la ecuación del círculo con centro en (5, 60°) y radio 3.

Planteamiento: $r^2 - 2\,c\,r\cos(\theta-\alpha) + c^2 = a^2$	**Desarrollo**: $r^2 - 2\,(5)\,r\cos(\theta-60°) + 25 = 9$ $r \;\; -10\,r\cos(\theta-60°)+16 = 0.$

2) Si $r = 4\cos\theta$. Hallar las coordenadas del centro del círculo y el radio correspondiente.

Planteamiento: $r = \pm\, 2\, a\cos\theta.$	**Desarrollo**: $r = 2\,(2)\cos\theta;\quad a = 2;\quad$ *la circunferencia pasa por el polo y su centro esta sobre el eje polar.* $c = a = 2 \quad y \quad \theta = 0;\quad$ *es decir* $\quad C\,(2, 0°) \quad y \quad a = 2.$

• Ecuaciones de las Cónicas.

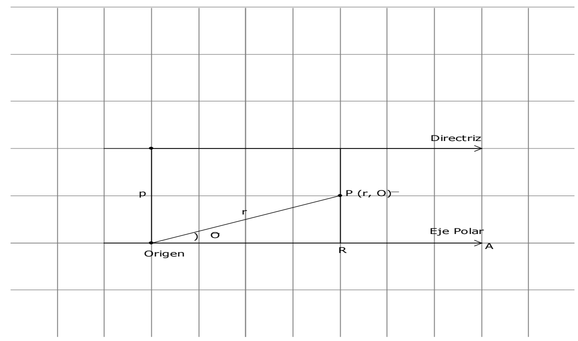
1) Si un foco está en el polo y la directriz **D** es $\perp$ al eje polar y esta situada **p** unidades a la izquierda del polo, la ecuación es: $$r = \frac{ep}{1 - e\cos\theta}.$$ **2)** Si un foco está en el polo y la directriz está a **p** unidades a la derecha del polo, la ecuación es: $$r = \frac{ep}{1 + e\cos\theta}.$$	

3) Si un foco está en el polo y la directriz **D** es ‖ al eje polar y a **p** unidades arriba del eje polar, la ecuación es:

$$r = \frac{ep}{1 + e\ sen\ \theta}.$$

4) Si un foco está en el polo y la directriz **D** es ‖ al eje polar y a **p** unidades debajo del eje polar, la ecuación es:

$$r = \frac{ep}{1 - e\ sen\ \theta}.$$



Ejemplos. Trazar la gráfica de las ecuaciones.

1) $r = \frac{8}{3 + 3\cos\theta}$.

Planteamiento y Desarrollo:

Dividiendo el numerador y denominador entre 3.

$$r = \frac{\frac{8}{3}}{1 + \cos\theta}; \quad e = 1 \quad \therefore \quad es\ una\ parábola.$$

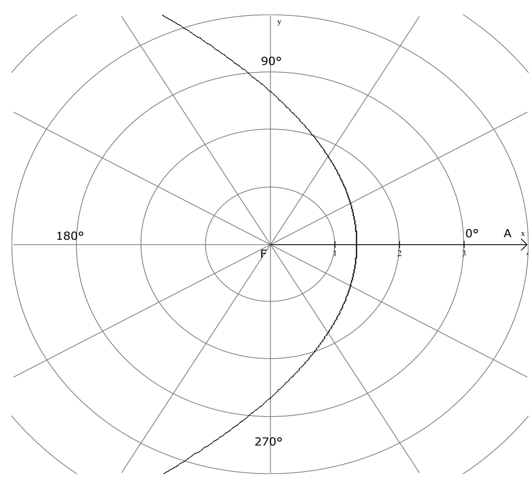
$$ep = \frac{8}{3}; \quad como\ e = 1 \quad \therefore \quad p = \frac{8}{3}.$$

$$.Si\ \theta = 0° \quad \therefore \quad r = \frac{4}{3} = 1.3.$$

$$Si\ \theta = 90° \quad \therefore \quad r = \frac{8}{3} = 2.7;$$

$$\theta = 180° \quad \therefore \quad r = error\ \ y$$

$$\theta = 270° \quad \therefore \quad r = \frac{8}{3} = 2.7$$



2) $r = \frac{15}{3 - 2\cos\theta}$.

Planteamiento y Desarrollo:

Dividiendo el numerador y denominador entre 3.

$$r = \frac{5}{1 - \frac{2}{3}\cos\theta}; \quad e = \frac{2}{3} \quad \therefore \quad es\ una\ elipse.$$

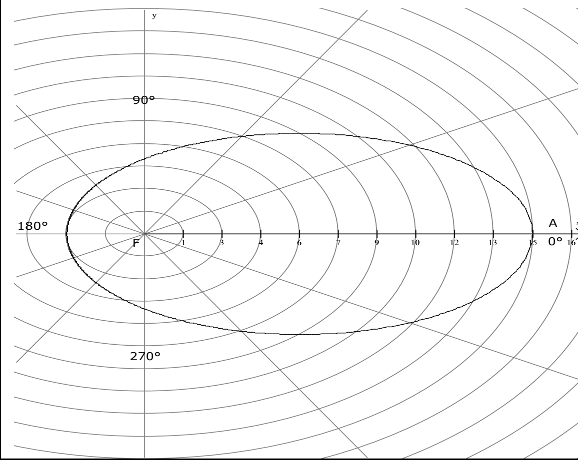
$$ep = 5; \quad como\ e = \frac{2}{3} \quad \therefore \quad p = \frac{15}{2}.$$

$$Si\ \theta = 0° \quad \therefore \quad r = 15$$

$$Si\ \theta = 90° \quad \therefore \quad r = 5;$$

$$\theta = 180° \quad \therefore \quad r = 3$$

$$y \quad \theta = 270° \quad \therefore \quad r = 5$$



Ejercicios Propuestos.

1) Escribir la ecuación polar de cada una de las rectas descritas:

a) recta horizontal que pasa por el punto (-3, 90°).

b) recta vertical que pasa por el punto (4, Π).

2) Hallar la ecuación del círculo con centro en (4, 0°) y radio 4.

3) Si $r = 2\cos\theta + 2\sqrt{3}\ sen\ \theta$. Hallar las coordenadas del centro del círculo y el radio correspondiente.

4) Hallar la ecuación del círculo con centro en (7, 120°) y radio 5.

5) Si $r^2 - 2\sqrt{2}\ r\cos\theta - 2\sqrt{2}\ r\ sen\ \theta - 5 = 0$. Hallar las coordenadas del centro del círculo y el radio correspondiente.

6) Hallar la ecuación del círculo con centro en $\left(6, \frac{3}{4}\pi\right)$ y radio 4.

7) Si $r^2 + r\cos\theta - \sqrt{3}\ r\ sen\ \theta - 3 = 0$. Hallar las coordenadas del centro del círculo y el radio correspondiente.

8) Hallar la ecuación del círculo con centro en $\left(3, \frac{7}{6}\pi\right)$ y pasa por el punto $\left(2, \frac{4}{3}\pi\right)$.

9) $r = \frac{8}{4+4\cos\theta}$. **S » Parábola.**

10) $r = \frac{6}{3-2\cos\theta}$. **S » Elipse.**

11) $r = \frac{15}{5-4\,sen\,\theta}$. **S » Hipérbola.**

12) $r = \frac{9}{2+2\cos\theta}$. **S » Parábola.**

13) $r = \frac{12}{2-\cos\theta}$. **S » Elipse.**

14) $r = \frac{4}{2+3\cos\theta}$. **S » Hipérbola.**

15) $r = \frac{10}{3-3\,sen\,\theta}$. **S » Parábola.**

16) $r = \frac{12}{2+sen\,\theta}$. **S » Elipse.**

17) $r = \frac{2}{1-2\cos\theta}$. **S » Hipérbola.**

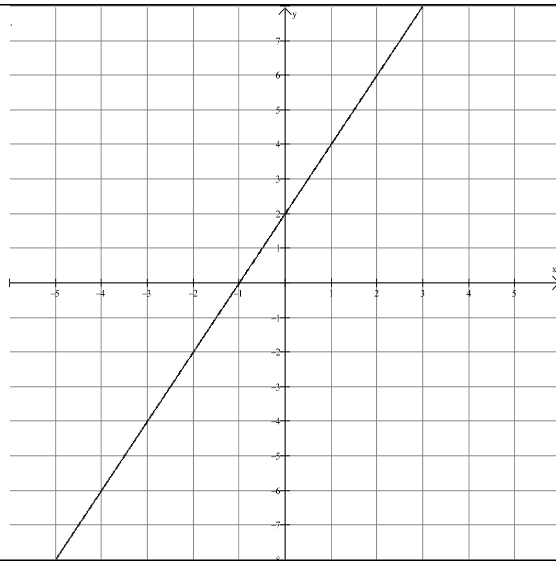
3.2.3. Ecuaciones Paramétricas.

Ejemplos. Encontrar las ecuaciones paramétricas y/o cartesianas, dada las siguientes condiciones y trazar las gráficas correspondientes:

1) La recta que pasa por los puntos (2, 6) y (-3, -4).

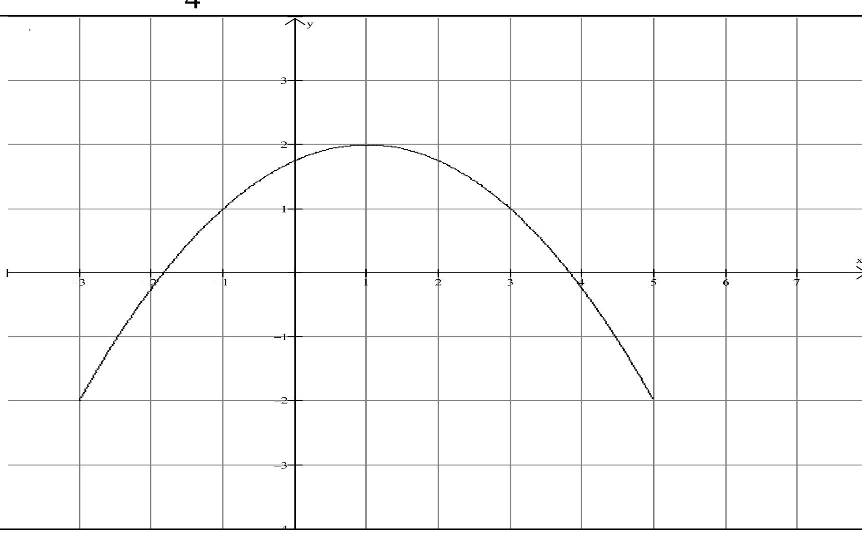
Sí $P_1(2, 6)$ *y* $P_2(-3, -4)$; $x-2=t(-3-2)$; $x-2=-5t$; $x=-5t+2$.

$y-6=t\,(-4-6)$; $y-6=-10t$; $y=-10t+6$.



2) $x=1+2t$ *y* $y=2-t^2$. $t=\dfrac{x-1}{2}$; $t^2=2-y$; $t^2=\dfrac{(x-1)^2}{4}$;

igualando $\dfrac{(x-1)^2}{4}=2-y$; $(x-1)^2=8-4y$; $(x-1)^2=-4(y-2)$.



- **Tiro Parabólico.**

Ejemplos.

1) Se lanza una piedra con una velocidad de 160 ft/seg, con una dirección de 45° respecto a la horizontal. Hallar la distancia hasta la cual llega la piedra y su altura máxima.

Planteamiento y Desarrollo:

$V_0 = 160\ ft/seg;\quad \alpha = 45°;\quad g = 32\ ft/seg.\quad x = 160\cos 45°\, t;$

$y = 160\, sen\, 45°\, t - \frac{1}{2}(32)t^2 \quad x = 160\,\frac{\sqrt{2}}{2}\,t;\quad x = 80\sqrt{2}\,t.\quad y = 80\sqrt{2}\,t - 16t^2;$

$cuando\ la\ piedra\ llega\ al\ suelo,\ y = 0\quad \therefore\quad 0 = 80\sqrt{2}\,t - 16t^2;\quad 16t^2 = 80\sqrt{2}\,t;$

$\frac{t^2}{t} = \frac{80\sqrt{2}}{16};\quad t = 5\sqrt{2}.\quad sustituyendo\ t\ en\ x;\quad x = 80\sqrt{2}\,(5\sqrt{2});\quad x = 800\ ft.$

$y = 80\sqrt{2}\,(5\sqrt{2}) - 16(5\sqrt{2})^2;\quad y = 800 - 800 = 0;\quad como\ una\ parábola\ es\ simétrica$

$\therefore la\ mitad\ del\ tiempo\ nos\ dará\ la\ altura\ máxina.\quad y = 80\sqrt{2}\,\frac{5\sqrt{2}}{2} - 16\left(\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)^2$

$y = 400 - 200 = 200\ ft.\quad altura\ máxima.$

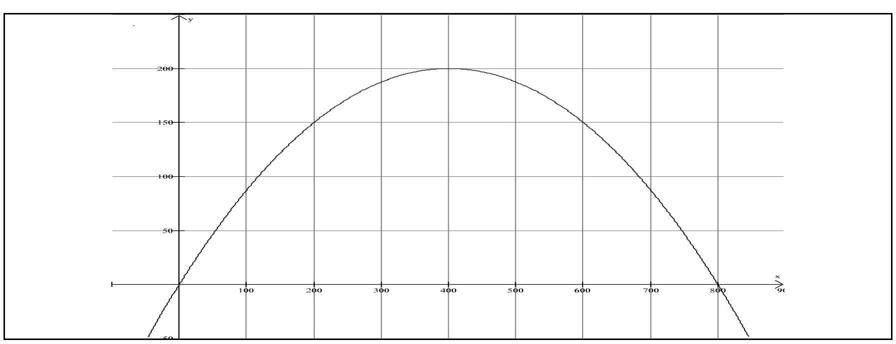
$Ecuación\ rectángular.\quad y = tg\,45°\, x - \frac{1}{2}(32)\frac{x^2}{(160)^2\cos^2 45°};\quad y = x - \frac{16x^2}{25600\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2};$

$y = x - \frac{16x^2}{25600\left(\frac{2}{4}\right)};\quad y = x - \frac{16x^2}{25600\left(\frac{1}{2}\right)};\quad y = x - \frac{32x^2}{25600};\quad y = x - \frac{x^2}{800}.\quad Reduciendo.$

$800y = 800x - x^2;\quad x^2 - 800x = -800y;\quad x^2 - 800x + 400^2 - 400^2 = -800y;$

$(x - 400)^2 = -800y + 160000;\quad (x - 400)^2 = -800(y - 200)$

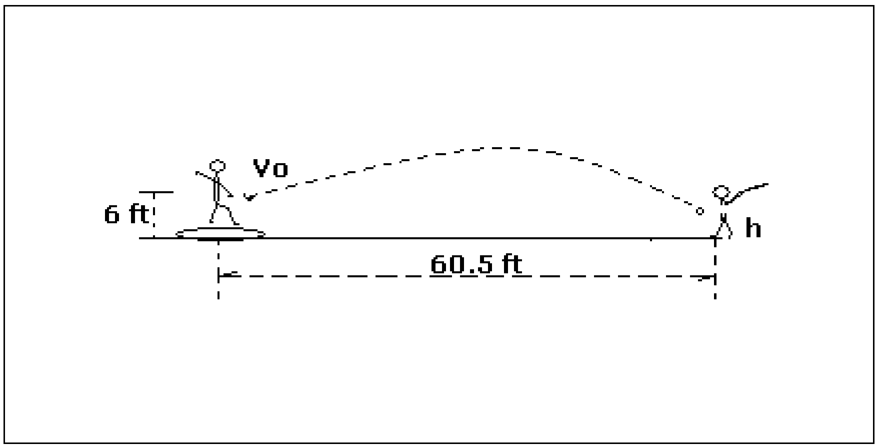
$Con\ vértice\ en\quad h = 400\ y\ k = 200.$



2) Un pícher lanza una a horizontalmente con una velocidad inicial de 108 ft/g. Si el punto del disparo está 6 ft arriba del suelo:

a) ¿a qué altura llega la pelota a la base meta, que está a una distancia de 60.5 ft del montículo?

b) ¿cuál será la respuesta a esta pregunta si la velocidad inicial fuera de 132 ft?



Planteamiento.	
$V_0 = 108\ ft/seg;\quad \theta = 0°;\quad g = 32\ ft/seg.$ $x = V_0 \cos\theta\ t \quad y \quad y = V_0\ sen\,\theta\ t - \frac{1}{2} g\ t^2.$ *Desarrollo .* $x = 108\cos 0° t;\quad x = 108(1)t;\quad x = 108t.$ $Si\ x = 60.5 \quad 60.5 = 108\ t;\quad t = \frac{60.5}{108};$ $t = 0.56\ seg.$	$y = 108\ sen\ 0° (0.56) - \frac{1}{2}(32)(0.56)^2$ $y = 5.018\ ft.$ $a)\quad V_0 = 132\ ft/seg;\quad x = 132\ t;$ $t = \frac{60.5}{132};\quad t = 0.46\ seg.$ $y = -\frac{1}{2}(32)(0.46)^2;\quad y = 3.386\ ft.$

Ejercicios Propuestos:

1) Trazar la gráfica de las siguientes ecuaciones paramétricas.

$a)\quad x = 1 + t^2 \quad y \quad y = 1 + t \qquad ; \qquad b)\quad x = 4 - 3t \quad y \quad y = 1 + t$

$c)\quad x = \cos\theta \quad y \quad y = 2\, sen\,\theta \qquad ; \qquad d)\quad x = sen\, t \quad y \quad y = \cos t$

2) Hallar la ecuación rectangular de la curva, cuyas ecuaciones paramétricas son: (trazar las gráficas correspondientes).

$a)\quad x = 2 + \cos\theta \quad y \quad y = 2 + sen\,\theta; \quad S \Rightarrow \quad (y-2)^2 + (x-2)^2 = 1; \quad h = 2; \quad k = 2.$

$b)\quad x = 3\, sen\,\theta \quad y \quad y = 4\cos\theta; \quad S \Rightarrow \quad \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1; \quad LR = 4.5; \quad a = 4; \quad b = 3; \quad c = 2.6$

3) Encontrar las ecuaciones paramétricas y/o cartesianas, dada las siguientes condiciones y trazar las gráficas correspondientes:

$a)\quad x = 3 + 4sen\theta \quad y \quad y = -4 + 3\cos\theta. \quad S \Rightarrow \quad \frac{(x-3)^2}{16} + \frac{(y+4)^2}{9} = 1.$

$b)\quad x = -2 + 2sen\theta \quad y \quad y = 3 + 2\cos\theta. \quad S \Rightarrow \quad \frac{(x+2)^2}{4} + \frac{(y-3)^2}{4} = 1.$

$c)\quad x = tg\theta \quad y \quad y = \sec\theta. \quad S \Rightarrow \quad y^2 - x^2 = 1.$

4) Un proyectil se dispara con una velocidad inicial de 192 ft/seg y con un ángulo de 30° arriba de la horizontal. Hallar las coordenadas de su posición al final de:

a) 2 seg.
b) ¿en qué tiempo está el proyectil a 96 ft arriba del suelo?
c) ¿cuál es el alcance máximo que alcanza el proyectil?
d) ¿cuál su altura máxima?

S » a) x=332.554 ft; y=128 ft. b) t_1=4.7 seg. y t_2=1.3 seg. c) x=997.661 ft. y d) y=144 ft.

5) Un proyectil que se dispara formando un ángulo de 12 ° con la horizontal, tiene una velocidad inicial de 678 mts. Háyanse:

a) las ecuaciones paramétricas de su trayectoria.
b) la altura máxima alcanzada.
c) su alcance horizontal hasta los 91.4 m, más próximos.

S » a)

$$x = v_0\cos\theta\, t; \quad y = v_0 sen\,\theta\, t - \frac{1}{2} g\, t^2; \quad H = \frac{v_0 sen^2\theta}{2g}; \quad D = \frac{v^2{}_0 sen\ 2\theta}{g}; \quad t = \frac{2v_0 sen\,\theta}{g}.$$

b) x=19033.4 m.; c) y=5.5 m.

Bibliografía.

1) Lehmann Charles H. Geometría Analítica. Limusa. 15ª Ed. 1990. México, D. F.
2) Cuellar Juan Antonio. Geometría Analítica. Mc. Graw Hill. 2° Ed. 2008 México, D. F.
3) Rivaud Juan José. Las Cónicas. Revista de la Sociedad Matemática Mexicana, “Matemáticas y Enseñanza”.
4) Bolt Brian. Algunas Actividades Matemáticas. Ed. Labor, 1988, que originalmente se publicó con el título de “More mathematical activities”, Cambridge university Press, 1985. La traducción al español es de Mariano Martínez Pérez.
5) Filloy Eugenio y Hitt Fernando. Geometría Analítica. Ed. Iberoamericana. México, D. F.
6) Gordon Fuller. Ed. Pearson. Geometría Analítica.
7) Apuntes del Ing. J. Ventura Ángel Fe lícitos, con 20 años de servicio.
8) Wplotsp
9) Geometry
10) http://esfm.ipn.mx/fermat
11) www.mcgraw-hill-educación.com