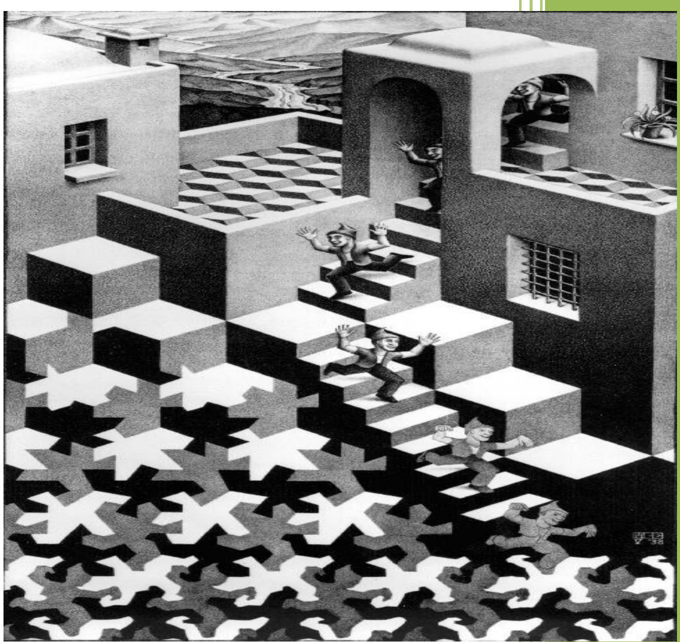
2010

Cálculo Integral: Guía II



Profr. Luis Alfonso Rondero García

INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

CECYT "WILFRIDO MASSIEU"

Departamento de Unidades de Aprendizaje del Área Básica

15/10/2010

Integración de Potencias de Funciones Trigonométricas.

Cuando las integrales presentan potencias de funciones trigonométricas es necesario utilizar diferentes identidades que permitan obtener una nueva expresión trigonométrica más sencilla para facilitar la integración.

Las identidades más empleadas son:

$\mathbf{Sen^2 x + Cos^2 x = 1}$ $\mathbf{Sec^2 x - Tg^2 x = 1}$ $\mathbf{Csc^2 x - Ctg^2 x = 1}$

$\mathbf{Sen^2 x = \frac{1}{2}(1 - Cos\ 2x)}$ $\mathbf{Cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + Cos\ 2x)}$

Integrales de potencias de la función Seno.

- Si las potencias son **impares** deberás emplear : $\mathbf{Sen^2 x + Cos^2 x = 1}$

de donde :

$$\mathbf{Sen^2 x = 1 - Cos^2 x}$$

- Si las potencias son **pares** deberás emplear : $\mathbf{Sen^2 x = \frac{1}{2}(1 - Cos\ 2x)}$

Ejemplos:

a)

$$\int sen^2 x dx = \int \frac{1}{2}(1-\cos 2x)dx = \int \frac{1}{2}dx - \int \frac{1}{2}\underbrace{\cos 2x dx}_{\substack{u = 2x \\ du = 2dx \\ \frac{du}{2} = dx}} = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\int \cos u \frac{du}{2} = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\int \cos u du$$

$$= \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}sen 2x + c$$

En algunos textos ésta solución se ve diferente porque se emplea la identidad del ángulo doble:

$$\mathbf{Sen\ 2u = 2\ Sen\ u\ Cos\ u}$$

$$\therefore \quad \frac{1}{2}x-\frac{1}{4}sen\,2x=\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}(2senx\cos x)=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}senx\cos x+c$$

b) $\int sen^3 xdx=\int senx(sen^2 x)dx=\int senx(1-\cos^2 x)dx=$

$$=\int \mathbf{senxdx}-\int \mathbf{senxcos^2\,xdx}$$

u = cos x **du = − sen x dx**

−du = sen x dx

$$=-\cos x-\left[\int u^2(-du)\right]=-\cos x+\int u^2du=-\cos x+\frac{u^3}{3}=-\cos x+\frac{1}{3}\cos^3 x+c$$

Integrales de potencias de la función Coseno.

- Si las potencias son impares deberás emplear : **$Sen^2 x + Cos^2 x = 1$**

  de donde :

  $Cos^2 x = 1 - Sen^2 x$

- Si las potencias son pares deberás emplear : **$Cos^2 x = \frac{1}{2}(1+Cos\ 2x)$**

Ejemplos:

a) $\int \cos^2 x\,dx$ $\quad = \int \frac{1}{2}(1+Cos\ 2x)dx=\frac{1}{2}\int dx+\frac{1}{2}\int \cos 2xdx=$

$$\int \cos^2 x\,dx=\int \frac{1}{2}(1+Cos\ 2x)dx=\frac{1}{2}\int dx+\frac{1}{2}\int \cos 2xdx=$$

$$=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\int \cos u\frac{du}{2}=\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\int \cos udu=\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}sen2x+c$$

$$u=2x \quad du=2dx \quad \frac{du}{2}=dx$$

Como: Sen 2u = 2 Sen u Cos u $\quad =\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}senx\cos x+c$

b) $\int \cos^3 x dx = \int \cos x \cos^2 x dx = \int \cos x(1 - sen^2 x)dx = \int \cos x - \int \cos x \underbrace{sen^2 x dx}_{u = senx}$

$du = \cos x dx$

$= senx - \int u^2 du = senx - \frac{u^3}{3} + c$

$= senx - \frac{sen^3 x}{3} + c$

Integrales de potencias de la función Tangente.

Debes emplear :

Identidad Pitagórica: $\quad$ **Sec^2- Tan^{2}u = 1**

Diferencial de la tangente: $\quad$ **d tanu = Sec^{2}u du**

y la integral : $\quad$ $\int \tan u du = \ln|\sec u| + c$

Ejemplos:

a) $\int \tan^2 udu$ $\quad = \nabla \quad = \int (\sec^2 u - 1)du = \int \sec^2 udu - \int du = \tan u - u + c$

$b) \int \tan^3 udu = \int \tan u \tan^2 udu = \int \tan u(\sec^2 u - 1)du$

$= \int \tan u \sec^2 udu - \int \tan udu$

Realizando cambio de variable en la primera integral: $\quad z = \tan u \quad dz = \sec^2 udu$

$\int zdz - \ln|\sec u| + c = \frac{z^2}{2} - \ln|\sec u| + c = \frac{1}{2}\tan^2 u - \ln|\sec u| + c$

c) $\int \tan^4 udu$

$= \int \tan^2 u \tan^2 udu =$ *solo se sustituye una tangente cuadrada*

$\int \tan^2 u(\sec^2 u - 1)du = \int \tan^2 u \sec^2 udu - \int \tan^2 udu$

$z = \tan u \quad dz = \sec^2 udu$

$= \int z^2 dz - \int \tan^2 udu \ \nabla = \frac{z^3}{3} - (\tan u - u) + c = \frac{1}{3}\tan^3 u - \tan u + u + c$

Integrales de potencias de la función Cotangente.

Debes emplear:

Identidad Pitagórica: **Csc^2- $Ctg^2u = 1$**

Diferencial de la Cotangente: **d Ctgu = - Csc^2u du**

Integral de la Cotangente: $\int ctg\, udu = \ln|sen\, u| + c$

a) $\int \cot^2 xdx = \int(\csc^2 x - 1)dx = \int \csc^2 xdx - \int dx = -ctgx - x + c$

b) $\int \cot^3 xdx = \int \cot x \cot^2 xdx = \int \cot x(\csc^2 x - 1)dx$

$$= \underbrace{\int \cot x \csc^2 xdx}_{} - \int \cot xdx = \int u(-du) - Ln|senx| = -\int udu - Ln|senx| = -\frac{u^2}{2} - Ln|senx|$$

$u = ctgx$
$du = -\csc^2 xdx$
$-du = \csc^2 xdx$

$$= -\frac{ctg^2 x}{2} - Ln|senx| + c$$

c) $\int \cot^4 xdx = \int \cot^2 x \cot^2 xdx = \int \cot^2 x(\csc^2 u - 1)dx$

$$= \int \cot^2 x \csc^2 xdx - \int \cot^2 xdx = \int u^2(-du) - \int(\csc^2 x - 1)dx = -\int u^2 du - \int \csc^2 xdx - \int dx$$

$u = \cot x$
$du = -\csc^2 xdx$
$-du = \csc^2 xdx$

$$= -\frac{u^3}{3} - \csc^2 x - x + c = -\frac{\cot^3 x}{3} - \cot x - x + c$$

Integrales de potencias de la función Secante y Cosecante.

Las integrales de las potencias impares de la Secante y Cosecante no pueden resolverse por éste método; se resolverán más adelante con el Método de **<Integración por Partes>** solo pueden resolverse las potencias pares que no sean múltiplos de potencias impares, ya que se puede emplear:

a) $\int \sec^2 xdx = \tan x + c$ b) $\int \csc^2 xdx = -ctgx + c$

Ejemplo: $\int sec^4 x dx$

$$\int sec^4 x dx = \int sec^2 x \ sec^2 x \ dx = \int (tg^2 x + 1) sec^2 x dx = \int tg^2 x \ sec^2 dx + \int sec^2 x dx$$

Siendo u=tg x & d tgx= sec^{2}x dx tenemos

$$\int u^2 du + tg\ x + c = \frac{u^3}{3} + tgx + c = \frac{tg^3 x}{3} + tgx + c$$

Como en la cotangente tenemos: d ctgx = -csc^{2}x dx & $\int \csc^2 x dx = -ctgx + c$

Justifica ó demuestra que:

$$\int csc^4 2x dx = -\frac{1}{2}\ ctg\ 2x - \frac{1}{6} ctg^3 2x + c$$

INTEGRACIÓN DE PRODUCTOS DE POTENCIAS DE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

SENOS Y COSENOS:

Potencia par del seno e impar del coseno:

Ejemplo:

$\int \mathbf{sen^2 x \cos^3 x dx =}$ **Se descompone la potencia impar del coseno:**

$$\int sen^2 x \cos^2 x \cos x dx =$$

se toma al cosx dx como una "semilla" diferencial del seno ya que : dsenx = cosx dx.

Se respeta: sen^{2}x y se transforma cos^{2}x en : 1-sen^{2}x

$$\therefore \int sen^2 x \cos^2 x \cos x dx = \int sen^2 x (1 - sen^2 x) \cos x dx = \int sen^2 x \cos x dx - \int sen^4 x \cos x dx$$

$$= \int u^2 du - \int u^4 du = \frac{u^3}{3} - \frac{u^5}{5} = \frac{1}{3} sen^3 x - \frac{1}{5} sen^5 x + c$$

***Potencia impar del seno y par del coseno*:**

Ejemplo:

$$\int sen^3 x \cos^2 x dx$$

Se descompone la potencia impar del seno: $\int sen^2 x \cos^2 x senx dx$

y se toma senxdx como una *"semilla" diferencial* del coseno ya que: dcosx = -senxdx

Por lo que : u = cos x , du = - senx dx & -du = senx dx

RECOMENDACIÓN:

Se respeta: $\cos^2 x$ y se transforma $sen^2 x$ en : $1-\cos^2 x$,ya que no se debe repetir la misma función que es *semilla diferencial.*

$$\therefore \int sen^2 x \cos^2 x senx dx = \int (1-\cos^2 x)\cos^2 x\, senx dx = \int \cos^2 x senx dx - \int \cos^4 x senx dx$$

$$= \int u^2(-du) - \int u^4(-du) = -\frac{u^3}{3} + \frac{u^5}{5} + c = -\frac{1}{3}\cos^3 x + \frac{1}{5}\cos^5 x + c$$

***Potencia par del seno y par del coseno*:**

RECOMENDACIÓN: Deberás siempre emplear las identidades:

$$Sen^2 x = \frac{1}{2}(1 - Cos\ 2x) \qquad Cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + Cos\ 2x)$$

$$\int sen^2 x\, cos^2 x\, dx = \int \frac{1}{2}(1-\cos 2x)\cdot\frac{1}{2}(1+\cos 2x)dx = \frac{1}{4}\int (1-\cos 2x)(1+\cos 2x)dx =$$

$$= \frac{1}{4}\int (1-cos^2 2x)dx = \frac{1}{4}\int dx - \frac{1}{4}\int cos^2 2x\, dx = \frac{1}{4}x - \frac{1}{8}\int \frac{1}{2}(1+\cos 2v)dv$$

$$= \frac{1}{4}x - \frac{1}{16}\int dv - \frac{1}{16}\cdot\frac{1}{2}\int \cos w\, dw = = \frac{1}{4}x - \frac{1}{16}v - \frac{1}{32}sen\, w + c$$

$$= \frac{1}{4}x - \frac{1}{16}2x - \frac{1}{32}sen2v + c = \frac{1}{4}x - \frac{1}{16}2x - \frac{1}{32}sen2(2x) + c = \frac{1}{4}x - \frac{1}{8}x - \frac{1}{32}sen4x + c$$

$$= \frac{1}{8}x - \frac{1}{32}sen4x + c$$

Comprobación:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{8}x - \frac{1}{32}sen4x\right) = \frac{1}{8} - \frac{1}{32}cos4x \cdot 4 = \frac{1}{8} - \frac{1}{8}cos4x = \frac{1}{8} - \frac{1}{8}[cos2(2x)]$$

$$= \frac{1}{8} - \frac{1}{8}[cos^2 2x - sen^2 2x] = \frac{1}{8} - \frac{1}{8}cos^2 2x + \frac{1}{8}sen^2 2x = \frac{1}{8}(1 - cos^2 2x + sen^2 2x)$$

$$= \frac{1}{8}(2sen^2 2x) = \frac{1}{4}sen^2 2x = \frac{1}{4}(sen2x)^2 = \frac{1}{4}(2\ senx\ cosx)^2 = \frac{1}{4}(4\ sen^2 x\ cos^2 x)$$

$$= sen^2 x\ cos^2 x$$

A) Potencia impar de la tangente y par de la secante:

Ejemplo:

$$\int \tan^3 x \sec^4 x dx$$

Se descompone la potencia par de la secante dejando $\sec^2 x\, dx$ como "semilla" diferencial :

$$\int \tan^3 x \sec^2 x \sec^2 x dx$$

Se descompone la otra *$\sec^2 x$* en : *$1+\tan^2 x$* y se deja sin cambio la *$\tan^3 x$* siguiendo la recomendación anterior.

$$= \int \tan^3 x(1 + \tan^2 x)\sec^2 x dx = \int \tan^3 x \sec^2 x dx + \int \tan^5 x \sec^2 x dx$$

u=tan x   du=sec²x dx

$$= \int u^3 du + \int u^5 du = \frac{u^4}{4} + \frac{u^6}{6} = \frac{1}{4}\tan^4 x + \frac{1}{6}\tan^6 x + c$$

B) Potencia par de la tangente e impar de la secante:

No puede resolverse por éste método.

C) Potencia par de la tangente y par de la secante:

Se procede igual que que en A)

Ejemplo: ***Resolver la siguiente integral*** $\int \frac{sen^2 xdx}{\cos^6 x}$

$$\int \frac{sen^2 xdx}{\cos^6 x} = \int \frac{sen^2 xdx}{\cos^2 x \cos^4 x} = \int \tan^2 x \sec^4 xdx = \int \tan^2 x \sec^2 x \underbrace{\sec^2 xdx}_{\substack{u=\tan x \\ du=\sec^2 xdx}}$$

$$\int \tan^2 x(1+\tan^2 x)\sec^2 xdx = \int \tan^2 x \sec^2 xdx + \int \tan^4 x \sec^2 xdx$$

$$\int \frac{sen^2 xdx}{\cos^6 x} = \int u^2 du + \int u^4 du \quad = \frac{u^3}{3} + \frac{u^5}{5} + c = \frac{1}{3}\tan^3 x + \frac{1}{5}\tan^5 x + c$$

D) Potencias impares de ambas funciones:

Se descomponen ambas funciones en par- impar dejando como "semilla" diferencial: Sec x tan x dx

ya que : d secx = sec x tan x dx por lo que se respetará la función : sec ^{n} x , y solo se transformará $\tan^m u$ empleando : $\tan^2 u = \sec^2 u - 1$

Ejemplo:

$$\int \tan^3 x \sec^3 xdx = \int \tan^2 x \sec^2 x \sec x \tan xdx = \int (\sec^2 x - 1)\sec^2 x \sec x \tan xdx =$$

$$\int \sec^4 x \sec x \tan xdx - \int \sec^2 x \sec x \tan xdx = \int v^4 dv - \int v^2 dv = \frac{1}{5}\sec^5 x - \frac{1}{3}\sec^3 x + c$$

$$\int \tan^5 x \sec^3 xdx = \int \tan^4 x \sec^2 x \underline{\sec x \tan xdx} = \int (\tan^2 x)^2 \sec^2 x \underline{\sec x \tan xdx}$$

$$= \int (\sec^2 x - 1)^2 \underline{\sec^2 \sec x \tan xdx} = \int (\sec^4 x - 2\sec^2 x + 1)\underline{\sec^2 x \sec x \tan xdx}$$

$$= \underbrace{\int \sec^6 x \underline{\sec x \tan x dx}}_{\substack{u = \sec x \\ du = \sec x \tan x}} - \int 2\sec^4 \underline{\sec x \tan x dx} + \int \sec^2 x \underline{\sec x \tan x dx}$$

$$= \int u^6 du - 2\int u^4 du + \int u^2 du = \frac{u^7}{7} - 2\frac{u^5}{5} + \frac{u^3}{3} + c = \frac{1}{7}sec^7 x - \frac{2}{5}sec^5 x + \frac{1}{3}sec^3 x + c$$

Actividad I: Resuelve las siguientes integrales de potencias trigonométricas y de Productos de potencias trigonométricas.

1) $\int sen^4 dx =$	6) $\int \tan^3 xdx =$	11) $\int sen^2 x \cos^3 x\, dx =$	16) $\int \sqrt{tg^3 4x} \sec^4 4xdx$
2) $\int sen^5 dx =$	7) $\int \tan^4 3xdx =$	12) $\int sen^3 x \cos^4 x\, dx$	17) $\int sen^3 x \cos^2 xdx =$
3) $\int \cos^4 3xdx =$	8) $\int ctg^2 xdx =$	13) $\int sen^5 2x \cos^3 2xdx =$	18) $\int \tan^3 x \sec^4 xdx =$
4) $\int \cos^5 2xdx =$	9) $\int ctg^3 xdx =$	14) $\int \tan^3 x \sec^5 xdx =$	19) $\int \tan^5 x \sec^3 xdx =$
5) $\int \tan^2 xdx =$	10) $\int ctg^4 x\, dx =$	15) $\int \tan^3 x \sec^6 xdx =$	20) $\int sen^3 x \cos^3 xdx =$

Actividad II: Resuelve las siguientes integrales aprovechando todo lo practicado anteriormente.

1 $\int cos^3 4x\ sen\ 4x\ dx$	5 $\int sen3x\ cos5x\ dx$	9 $\int csc^3 xdx$
2 $\int sen^5 xcos^2 x\ dx$	6 $\int cos4x\ \ cos3xdx$	10 $\int tg^6 xsec^4 xdx$
3 $\int cos^4 x\ dx$	7 $\int ctg^3 x\ dx$	11 $\int tg^3 xsec^5 xdx$
4 $\int sen^2 3xcos^2 3x\ dx$	8 $\int sec^4 x\ dx$	12 $\int tg^2 xsec^3 xdx$

Después de resolver todos los ejercicios anteriores satisfactoriamente ,podrías resolver la integral $\int sen^6 t cos^2 t\, dt$ **?**

¡ Inténtalo !

Actividad complementaria II: Resuelve las siguientes integrales de potencias trigonométricas y de productos de potencias trigonométricas.

1 $\int sen^4 x\, dx$	2 $\int sen^2 3x \cos^4 3x\, dx$	3 $\int \cos^6 x\, dx$
4 $\int sen^4 2x\, dx$	5 $\int sen\, 3x \cos 5x\, dx$	6 $\int \frac{\tan\sqrt{3x}\, sec^2\sqrt{3x}}{\sqrt{3x}}\, dx$
7 $\int \cot^4 \frac{x}{4} dx$	8 $\int \cot^6 2x \csc^4 2x dx$	9 $\int \frac{\cos^2 \frac{x}{5}}{sen^4 \frac{x}{5}} dx$
10 $\int \sqrt{\tan^3 4x}\ \sec^4 4x dx$	11 $\int \sec^6 x dx$	12 $\int \cos^5 x \sin^2 x dx$
13 $\int \cos^2(3x) \sin^3(3x) dx$	14 $\int \frac{\sqrt{\sin^3(2x)}}{\sec(2x)} dx$	15 $\int \sin^3 \frac{x}{a} \cos^3 \frac{x}{a} dx$
16 $\int \sin^3 6x \cos 6x dx$	17 $\int \sin^7 x dx$	

INTEGRACIÓN POR PARTES

Descripción del método

Hay un gran número de integrales no inmediatas que presentan productos de funciones de distintas clases, por ejemplo:

$\int x\,\mathrm{sen}\,x\,dx \;\; ; \;\; \int xe^{x}dx \;\; ; \;\; \int \arctan\sqrt{x}\,dx$

Estas integrales pueden resolverse por el método llamado integración por partes que se describe a continuación:

De la fórmula diferencial: **d (uv) = udv + vdu**

Se tiene que: **udv = d (uv) - vdu**

Integrando en ambos miembros: $\int udv = uv - \int vdu$: ***Fórmula para integrar por partes***

Esta fórmula o método se aplica cuando se quiere integrar un producto $\int udv$, cuyos factores **"u"** y **"dv"** son las partes de la integral, en donde **"dv"** debe ser integrable y siempre incluye a la **"dx".** La integral que se obtiene $\int vdu$ en el segundo miembro de la fórmula, debe ser mas sencilla que la original, o bien un múltiplo de ella.

Pasos para integrar por partes .

1º.- Seleccionar y designar las partes de la integral como (u y dv). No hay una regla sobre como tomar las partes, sin embargo, *se recomienda* tomar como "u" a la parte más sencilla y a "dv" la parte restante del integrando, que por lo general es la de aspecto más complicado.

2º.- Calcular "du " (diferenciando u) y "v"(integrando dv).

3º.- Sustituir los valores seleccionados y calculados en la fórmula $\int udv = uv - \int vdu$ **y desarrollar todo simplificando hasta obtener una integral inmediata y fácil de resolver.**

Ejemplo 1

$$\int xsenxdx$$

Sea **u = x** **;** $\frac{du}{dx}=1$ **;** $du = dx$

$\mathrm{dv} = \mathrm{senx}\,\mathbf{dx}$ **;** **v=** $\int \mathrm{dv} = \int \mathrm{senx}\,\mathbf{dx}$ **;** $\mathrm{v} = -\cos \mathrm{x}$

$$\int xsenxdx = x(-\cos x) - \int(-\cos x)dx = -x\cos x + \int \cos xdx = -\mathrm{x}\cos\mathrm{x} + \mathrm{senx} + \mathrm{c}$$

Realicemos el mismo ejercicio pero tomando al contrario las partes

$\mathbf{u = senx}$; $\frac{\mathbf{du}}{\mathbf{dx}} = \mathbf{\cos x}$; $\mathbf{du} = \mathbf{\cos xdx}$

$\mathbf{dv} = \mathbf{xdx}$; **v=** $\int \mathrm{dv} = \int \mathrm{xdx}$ $\mathrm{v} = \frac{\mathrm{x}^2}{2}$

$$\int xsenxdx = senx\left(\frac{x^2}{2}\right) - \int \frac{x^2}{2}\cos xdx$$

Se complicó la integral. Lo anterior significa que es muy importante la manera en que son designadas las partes de la integral.

Existen integrales en las que el proceso de integración por partes debe aplicarse más de una vez hasta que la segunda integral resultante de cada proceso sea inmediata.

Ejemplo 2 : $\int x^2\, senxdx$

Selección : **u = x^2** **Cálculo :** **du = 2x dx**

dv = senx dx **v= - cos x**

$$\therefore \quad \int x^2 \operatorname{sen} x\,dx = -x^2\cos x - \int -\cos x(2x\,dx) = -x^2\cos x + 2\int x\cos x\,dx$$

$u = x$
$dv = \cos x\,dx$
$du = dx$
$v = \operatorname{sen} x$

se vuelve a integrar por partes

$$= -x^2\cos x + 2\left[x\operatorname{sen}x - \int \operatorname{sen}x\,dx\right] = -x^2\cos x + 2x\operatorname{sen}x - 2\int \operatorname{sen}x\,dx =$$
$$-x^2\cos x + 2x\operatorname{sen}x - 2(-\cos x) = -x^2\cos x + 2x\operatorname{sen}x + 2\cos x + c$$

Existen integrales en las que después de aplicar la integración por partes vuelve a aparecer la misma integral original pero con signo diferente por lo que deberá tomarse como incógnita de una ecuación y por lo tanto deberá despejarse al primer miembro para finalmente obtener su valor .

Ejemplo 3

$$\int \sec^3 x\,dx = \int \sec x \sec^2 x\,dx$$
$$u = \sec x \quad dv = \sec^2 x\,dx \qquad du = \sec x\,tg\,x\,dx \quad v = tg\,x$$
$$= \sec x\tan x - \int \tan x\sec x\tan x\,dx = \sec x\tan x - \int \tan^2 x\sec x\,dx$$
$$= \sec x\tan x - \int (\sec^2 x - 1)\sec x\,dx$$
$$= \sec x\tan x - \int \sec^3 x\,dx + \int \sec x\,dx$$
$$= \int \sec^3 x\,dx = \sec x\tan x - \int \sec^3 x\,dx + \int \sec x\,dx$$
$$= \int \sec^3 x\,dx + \int \sec^3 x\,dx = \sec x\tan x + Ln|\sec x + \tan x|$$
$$= 2\int \sec^3 x\,dx = \sec x\tan x + Ln|\sec x + \tan x|$$
$$= \int \sec^3 x\,dx = \frac{\sec x\tan x + Ln|\sec x + \tan x|}{2} + c$$

Actividad II: Resolver las siguientes integrales por *Integración por partes*

1) $\int x\cos x dx =$

2) $\int x^2 sen x dx =$

3) $\int x^2 e^x dx =$

4) $\int x^3 e^{2x} dx =$

5) $\int xe^{2x} dx =$

6) $\int xe^{-x} dx =$

7) $\int xe^x dx =$

8) $\int \ln x dx =$

9) $\int x\ln x dx =$

10) $\int x^3 e^{x^2} dx =$

11) $\int arctg\, 3x dx =$

12) $\int arc\,sen\, 2x dx =$

13) $\int e^x sen x dx =$

14) $\int x^2 e^{-3x} dx =$

15) $\int \frac{\ln x dx}{x^2} =$

INTEGRACIÓN POR SUSTITUCIÓN TRIGONOMÉTRICA.

Se aplica a integrales de funciones racionales dónde aparezca una diferencia ó suma de cuadrados lo que permite relacionarse con el Teorema de Pitágoras y por lo tanto se puede estructurar un triángulo rectángulo donde la expresión original define alguna función trigonométrica de uno de sus ángulos agudos.

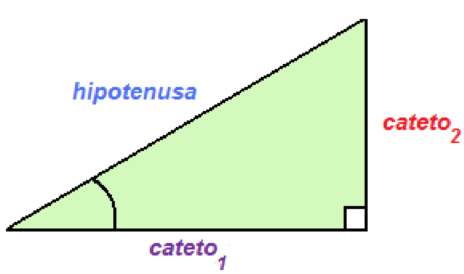
Descripción del método

1º Debes considerar que por el Teorema de Pitágoras, la hipotenusa y cualquiera de los catetos se obtienen de la siguiente manera:

Hipotenusa : $\sqrt{\mathbf{cateto}_1^{\,2} + \mathbf{cateto}_2^{\,2}}$

Cateto : $\sqrt{\mathbf{hip}^2 - \mathbf{cateto}^2}$

ya que el teorema tiene la siguiente representación geométrica y matemática:



Teorema de Pitágoras

$hipotenusa^2 = cateto_1^{\,2} + cateto_2^{\,2}$

2º Las funciones angulares más sencillas que se pueden definir en el triángulo establecido son: ***seno-tangente-secante***

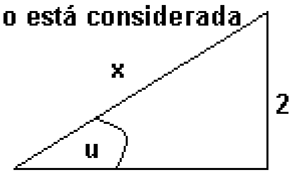
3º La condición básica al establecer éstas funciones es que la variable esté siempre en el numerador de la fracción obtenida como función.

Ejemplos:

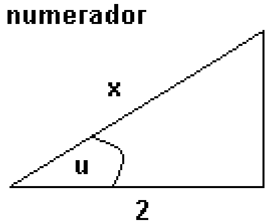
I) $\int \frac{dx}{x^2-4} =$

En la expresión : $x^2 - 4$, la raíz del minuendo es la hipotenusa : x y la raíz del sustraendo es uno de los catetos : 2 . En el siguiente triángulo rectángulo ubicaremos éstos elementos y definiremos la función correspondiente.

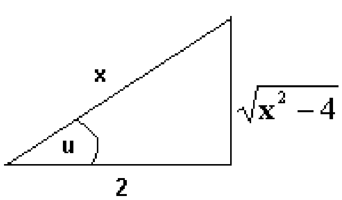
En este arreglo la función más sencilla que puede definirse donde la variable esté en el numerador es : csc u pero ésta no está considerada



En éste arreglo la función más sencilla es : sec u la cual está considerada y además la variable está en el numerador



El arreglo del segundo triángulo es el correcto por lo que lo completaremos el triángulo colocando el otro cateto que es :



$$\sec u = \frac{x}{2}$$

$$x = 2\sec u$$

$$dx = 2\sec u \,\mathrm{tg}\, u \,du$$

Sustituyendo x y su diferencial en la integral original tenemos:

$$\int \frac{dx}{x^2-4} = \int \frac{2\sec u\, tg\, u\, du}{4\sec^2 u - 4} = \int \frac{2\sec u\, tg\, u\, du}{4\left(\sec^2 u - 1\right)} = \frac{1}{2}\int \frac{\sec u\, tg\, u\, du}{tg^2 u} = \frac{1}{2}\int \frac{\sec u\, du}{tg\, u}$$

Como: $\sec u = \frac{1}{\cos u}$ y $tg\, u = \frac{sen\, u}{\cos u}$ *entonces* $\frac{\sec u}{tg\, u} = \frac{\frac{1}{\cos u}}{\frac{sen\, u}{\cos u}} = \frac{1}{sen\, u} = \csc u$

$$\therefore \quad \int \frac{dx}{x^2-4} = \frac{1}{2}\int \csc u\, du = \frac{1}{2}\ln\left|\csc u - ctg\, u\right| + c$$

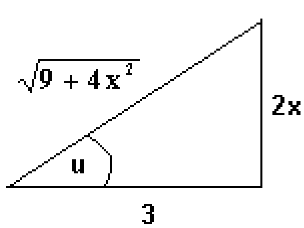
Finalmente deberá regresarse a la variable original x por lo que deberá calcularse en el triángulo: **csc u y ctg u**

$$\csc u = \frac{x}{\sqrt{x^2-4}} \qquad ctg\, u = \frac{2}{\sqrt{x^2-4}}$$

$$\therefore \quad \boxed{\int \frac{dx}{x^2-4} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x}{\sqrt{x^2-4}} - \frac{2}{\sqrt{x^2-4}}\right| = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-2}{\sqrt{x^2-4}}\right| + c}$$

$$\text{II)} \int \frac{dx}{x\sqrt{9+4x^2}} =$$

La expresión: $\sqrt{9+4x^2}$ es la hipotenusa y la raíz de los sumandos son los catetos: 3 & 2x . En el siguiente triángulo rectángulo ubicaremos éstos elementos y definiremos la función correspondiente



La función más sencilla a definir es tg u

$$\tan u = \frac{2x}{3} \qquad x = \frac{3}{2}\tan u$$

$$dx = \frac{3}{2}\sec^2 u\, du$$

Sustituyendo "x" y su "dx" en la integral original tenemos:

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{9+4x^2}} = \int \frac{\frac{3}{2}\sec^2 u\,du}{\frac{3}{2}\tan u\sqrt{9+4\left(\frac{9}{4}\tan^2 u\right)}} = \int \frac{\sec^2 u\,du}{\tan u\sqrt{9+9\tan^2 u}} = \int \frac{\sec^2 u\,du}{\tan u\sqrt{9\left(1+\tan^2 u\right)}}$$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{\sec^2 u\,du}{\tan u\sqrt{\sec^2 u}} = \frac{1}{3}\int \frac{\sec u\,du}{\tan u} = \frac{1}{3}\int \frac{\frac{1}{\cos u}}{\frac{senu}{\cos u}}du = \frac{1}{3}\int \frac{1}{senu}du = \frac{1}{3}\int \csc u\,du$$

$$= \frac{1}{3}\ln\left|\csc u - ctg u\right| + c$$

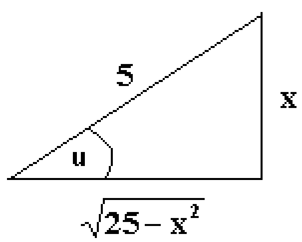
Finalmente deberá regresarse a la variable original "x" por lo que deberá calcularse en el triángulo: csc u y ctg u

$$\csc u = \frac{\sqrt{9+4x^2}}{2x} \qquad ctg u = \frac{3}{2x}$$

$$\therefore \quad \boxed{\int \frac{dx}{x\sqrt{9+4x^2}} = \frac{1}{3}\ln\left|\frac{\sqrt{9+4x^2}}{2x} - \frac{3}{2x}\right| + c = \frac{1}{3}\ln\left|\frac{\sqrt{9+4x^2}-3}{2x}\right| + c}$$

III) $\int \frac{5dx}{\sqrt{25-x^2}} =$

En la expresión : $\sqrt{25-x^2}$ **:la raíz del minuendo 25 es la hipotenusa 5 y la raíz del sustraendo x^2 es el cateto : x . En el siguiente triángulo rectángulo ubicaremos éstos elementos y definiremos la función correspondiente**



La función más sencilla a definir es sen u

$$\text{sen}\,u = \frac{x}{5} \qquad x = 5\,\text{sen}\,u \quad dx = 5\cos u\,du$$

Sustituyendo x y su diferencial en la integral original tenemos:

$$\int \frac{5dx}{\sqrt{25-x^2}} = 5\int \frac{5\cos u\,du}{\sqrt{25-25sen^2 u}} = 25\int \frac{\cos u\,du}{\sqrt{25\left(1-sen^2 u\right)}} = 25\int \frac{\cos u du}{5\sqrt{\cos^2 u}} = 5\int du = 5u + c$$

Finalmente deberá regresarse a la variable original x por lo que deberá calcularse en el triángulo: u

En el triángulo observamos que: u es el ángulo cuya función seno vale $\frac{x}{5}$

lo cual se escribe matemáticamente : $\text{arcsen}\frac{x}{5}$

$$\therefore \int \frac{5dx}{\sqrt{25-x^2}} = 5\,\text{arcsen}\frac{x}{5} + c$$

Estos tres problemas tipo permitirán que resuelvas los problemas propuestos en la siguiente actividad.

Actividad III: Resuelve las siguientes integrales por *Sustitución trigonométrica*.

1) $\int \frac{5x\,dx}{\sqrt{x^2-9}} =$

2) $\int \frac{x^2 dx}{x^2+16} =$

3) $\int \frac{5dx}{\sqrt{25-x^2}} =$

4) $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{9-x^2}} =$

5) $\int \frac{x^2 dx}{9-x^2} =$

6) $\int \frac{dx}{x^2-1} =$

7) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-9}} =$

8) $\int \frac{\sqrt{1-x^2}\,dx}{x} =$

9) $\int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^4}dx =$

10) $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{(9-x^2)^3}} =$

11) $\int \frac{x^2 dx}{(x^2+4)^2} =$

12) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{9-x^2}} =$

13) $\int \frac{\sqrt{x^2-16}}{x^4}dx =$

14) $\int \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}} =$

15) $\int \frac{dx}{1-x^2} =$

16) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^4-x^6}} =$

17) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-3}} =$

18) $\int \frac{dx}{4x^2+9} =$

19) $\int \sqrt{x^2+4}\,dx =$

20) $\int x^2\sqrt{4-x^2}\,dx =$

21) $\int \frac{dx}{x^2+1} =$

Actividad Complementaria III *(mayor grado de dificultad)*

En los siguientes ejercicios, calcula la integral indefinida:		
1. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4-x^2}}$	2. $\int \frac{1}{(z^2-2z+5)^2}dz$	3. $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$
4. $\int \frac{\sqrt{25-x^2}}{x}dx$	5. $\int \sqrt{x^2+4}dx$	6. $\int \frac{x}{1+x^4}dx$
7. $\int \frac{1}{x^2-1}dx$		

INTEGRACIÓN POR DESCOMPOSICIÓN EN FRACCIONES PARCIALES.

Descripción del método

Se llama función racional a una expresión del tipo:

$$f(x)=\frac{g(x)}{h(x)} \qquad ; \qquad \frac{x^3+3x}{x^2-2x-3}$$

Cuyo numerador y denominador son polinomios.

Si el grado del numerador es igual o superior al del denominador se tiene una fracción impropia por lo que el cociente resulta ser un entero más un residuo. Este cociente se obtiene por medio de la división. Así :

$$\frac{x^3+3x}{x^2-2x-3}=x+2+\frac{10x+6}{x^2-2x-3}$$

Una fracción cuyo numerador es de grado inferior al denominador puede transformarse en una suma de fracciones parciales, cuyos denominadores sean factores del primitivo denominador. Así tenemos que:

$$\mathbf{\frac{10x+6}{x^2-2x-3}=\frac{10x+6}{(x-3)(x+1)}=\frac{9}{x-3}+\frac{1}{x+1}}$$

Muchas veces esas fracciones pueden hallarse por tanteos.

La descomposición en fracciones parciales presenta 4 casos diferentes los cuales se muestran a continuación:

Caso I.- Los factores en que se pueden descomponer el denominador son todos de primer grado y ninguno se repite.

Ejemplo $\displaystyle\int \mathbf{\frac{x^4+2x+6}{x^3+x^2-2x}dx}$

Dividiendo el numerador por el numerador por el denominador, obtenemos

$$\frac{x^4+2x+6}{x^3+x^2-2x}=x-1+\frac{3x^2+6}{x^3+x^2-2x}=x-1+\frac{3x^2+6}{x(x-1)(x+2)}$$

Supongamos

$$\frac{3x^2+6}{x(x-1)(x+2)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x+2}$$

Los 2 miembros de esta ecuación son simplemente maneras distintas de escribir la misma función. Por consiguiente, si quitamos denominadores, los 2 miembros de la ecuación resultante.

$$3x^2+6=A(x-1)(x+2)+B(x)(x+2)+C(x)(x-1)$$

$$3x^2+6=A(x^2+x-2)+Bx^2+2Bx+Cx^2-Cx$$

$$3x^2+6=Ax^2+Ax-2A+Bx^2+2Bx+Cx^2-Cx$$

Factorizando:

$$3x^2+6=(A+B+C)x^2+(A+2B-C)x-2A$$

De esta identidad tenemos

$A+B+C=3$ I

$A+2B-C=0$ II

$-2A=6$ III

Resolviendo el sistema de ecuaciones, obtenemos $A=-3, B=3, C=3$

Recíprocamente, si A, B y C tienen esos valores, se satisfacen idénticamente las ecuaciones anteriores. Por consiguiente:

$$\int\frac{x^4+2x+6}{x^3+x^2-2x}dx=\int\left[x-1-\frac{3}{x}+\frac{3}{x-1}+\frac{3}{x+2}\right]dx$$

$$=\int xdx-\int dx-3\int\frac{dx}{x}+3\int\frac{dx}{x-1}+3\int\frac{dx}{x+2}$$

$$=\frac{x^2}{2}-x-3\ln x+3\ln(x-1)+3\ln(x+2)+C=\frac{x^2}{2}-x+3\ln\left|\frac{(x-1)(x+2)}{x}\right|+C$$

Caso II.- **Los factores en que se puede descomponer el denominador son todos de primer grado, pero algunos están repetidos**.

Ejemplo $\int \frac{8x^3+7}{(x+1)(2x+1)^3}dx$

Supongamos que:

$$\frac{8x^3+7}{(x+1)(2x+1)^3}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{(2x+1)^3}+\frac{C}{(2x+1)^2}+\frac{D}{(2x+1)}$$

Correspondiendo al factor repetido $(2x+1)^3$, introducimos entonces fracciones con $(2x+1)^3$ y todas las potencias inferiores como denominadores. Desarrollando y resolviendo en igual forma que en el caso I obtenemos:

$$A=1, B=12, C=6, D=0$$

De aquí obtenemos

$$\int \frac{8x^3+7}{(x+1)(2x+1)^3}dx=\int\left[\frac{1}{x+1}+\frac{12}{(2x+1)^3}-\frac{6}{(2x+1)^2}\right]dx$$

$$=\ln|x+1|-\frac{3}{(2x+1)^2}+\frac{3}{2x+1}+C$$

Caso III.- El denominador contiene factores de segundo grado, pero ninguno repetido.

Ejemplo: $\int \frac{4x^2+x+1}{x^3-1}dx$

Los factores del denominador son $(x-1)$ y (x^2+x+1)

Supongamos

$$\frac{4x^2+x+1}{x^3-1}=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+x+1}$$

Empleamos pues, con el denominador cuadrático x^2+x+1, un numerador que no es una sola constante, sino una función lineal Bx+C. Haciendo desaparecer las fracciones y resolviendo para A, B y C obtenemos:

A=2, B=2 y C=1

Por consiguiente

$$\int\frac{4x^2+x+1}{x^3-1}dx=\int\left(\frac{2}{x-1}+\frac{2x+1}{x^2+x+1}\right)dx$$

$$=2\ln|x-1|+\ln|x^2+x+1|+C$$

Caso IV.- El denominador contiene factores de segundo grado repetidos.

Por cada factor de la forma $(ax^2+bx+c)^2$ que resulte de la factorizacion de g(x) le corresponde una suma de "n" fracciones de la forma:

$$\frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^n}+\frac{Cx+D}{(ax^2+bx+c)^{n-1}}+\cdots+\frac{Lx+M}{(ax^2+bx+c)}$$

De haber factores lineales repetidos o no, se resuelven estos como el caso I y II.

Ejemplo: $$\boxed{\int\frac{8x^3+13x}{(x^2+2)^2}dx}$$

Solucion : Incluimos una fraccion simple por cada potencia de (x^2+2) y expresamos

$$\frac{8x^3+13x}{(x^2+2)^2}=\frac{Ax+B}{(x^2+2)^2}+\frac{Cx+D}{x^2+2}$$

$$\begin{aligned}8x^3+13x &= Ax+B+(Cx+D)(x^2+2)\\ &= Ax+B+Cx^3+2Cx+Dx^2+2D\\ &= Cx^3+Dx^2+(A+2C)x+(B+2D)\end{aligned}$$

$C=8$	$A+2C=13$	$B+2D=0$
$D=0$	$A+2(8)=13$	$B+2(0)=0$
$A+2C=13$	$A=13-16$	$B=0$
$B+2D=0$	$A=-3$	

$$\frac{8x^3+13x}{(x^2+2)^2}=\frac{-3x}{(x^2+2)}+\frac{8x}{x^2+2}$$

$$\int\left(\frac{-3x}{(x^2+2)^2}+\frac{8x}{x^2+2}\right)dx=$$

$$\int\frac{8x}{x^2+2}\,dx-3\int\frac{x}{(x^2+2)^2}\,dx$$

$$=4\ln\left|x^2+2\right|-\frac{3}{2}\frac{(x^2+2)^{-1}}{-1}$$

$$=4\ln\left|x^2+2\right|-\frac{3}{2}\frac{(x^2+2)^{-1}}{-1}+c$$

$$=4\ln\left|x^2+2\right|-\frac{3}{2}\frac{(x^2+2)^{-1}}{-1}+c$$

$$=4\ln\left|x^2+2\right|-\frac{3}{2}\frac{(x^2+2)^{-1}}{-1}+c$$

$$= 4\ln\left|x^2+2\right| - \frac{3}{2}\frac{(x^2+2)^{-1}}{-1} + c$$

$$\therefore \int \frac{8x^3+13x}{\left(x^2+2\right)^2}dx = 4\ln\left|x^2+1\right| + \frac{3}{2(x^2+2)} + c$$

EJEMPLOS CASO I: Factores lineales no repetidos

$$1)\int \frac{3x-2}{x^3-x^2-2x}dx$$

Paso 1.- Factorizar el denominador:

$$x^3-x^2-2x = x\left(x^2-x-2\right) = x(x-2)(x+1)$$

Paso 2.- A cada factor lineal $\mathbf{ax+b}$ que esté una sola vez en el denominador de una fracción racional propia, le corresponde una sola fracción simple de la forma $\frac{A}{ax+b}$ donde A es una constante cuyo valor habrá que calcularse.

En este ejemplo, descompondremos la fracción original en tres fracciones cuyos numeradores serán A, B y C. Observemos que el grado del denominador es tres y es el mismo número de constantes por determinar.

$$\int \frac{3x-2}{x^3-x^2-2x}dx = \frac{3x^2-2}{x^3-x^2-2x} = \frac{3x-2}{x(x-2)(x+1)}$$

$$\frac{3x-2}{x(x-2)(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{(x-2)} + \frac{C}{(x+1)}$$

$$\frac{3x-2}{x(x-2)(x+1)} = \frac{A(x-2)(x+1)+Bx(x+1)+Cx(x-2)}{x(x-2)(x+1)}$$

$$3x-2 = A(x-2)(x+1)+Bx(x+1)+Cx(x-2)$$

Para calcular el valor de las constantes A, B y C, obtenemos las raíces de $x(x-2)(x+1)$ *que son:*

$$x(x-2)(x+1)=0$$

$$x=0$$
$$x-2=0$$
$$x=2$$
$$x+1=0$$
$$x=-1$$

Evaluando las raíces

$$3x-2=A(x-2)(x+1)+Bx(x+1)+Cx(x-2)$$

para $x=0$

$$-2=A(-2)(1)+B(0)+C(0)$$
$$-2=-2A$$
$$A=1$$

para $x=2$

$$4=A(0)(3)+B(6)+C(0)$$
$$4=6B$$
$$B=\frac{2}{3}$$

para $x=1$

$$-5=A(0)+B(0)+C(3)$$
$$-5=3C$$
$$C=-\frac{5}{3}$$

Sustituimos los valores obtenidos de A, B y C, en

$$\frac{3x-2}{x(x-2)(x+1)}=\frac{1}{x}+\frac{\frac{2}{3}}{x-2}+\frac{\frac{-5}{3}}{x+1}$$

Integramos

$$\int \frac{3x-2}{x^3-x^2-2x}\,dx = \int \frac{dx}{x} + \frac{2}{3}\int \frac{dx}{x-2} - \frac{5}{3}\int \frac{dx}{x+1}$$

$$= \ln|x| + \frac{2}{3}\ln|x-2| - \frac{5}{3}\ln|x+1| + c$$

por la propiedad de los logaritmos queda:

$$\int \frac{3x-2}{x^3-x^2-2x}\,dx = \frac{\ln\left|x(x-2)^{\frac{2}{3}}\right|}{\ln\left|(x+1)^{\frac{5}{3}}\right|} + c$$

2) $\int \frac{3x-1}{x^2-x-6}$

Paso 1.- Factorizamos el denominador:

$$x^2-x-6 = (x-3)(x+2)$$

Paso 2.-Descomponemos la fracción original en dos fracciones parciales:

$$\frac{3x-1}{x^2-x-6} = \frac{A}{(x-3)} + \frac{B}{(x+2)}$$

Paso 3.- Multiplicamos en cruz empleando el algoritmo para la suma de fracciones con distinto denominador:

$$3x-1 = A(x+2) + B(x-3)$$

Paso 4.- Sustituimos valores

$x - 3 = 0$ $\quad\quad$ $x + 2 = 0$
$x = 3$ $\quad\quad$ $x = -2$

para $x = 3$

$$3(3) - 1 = A(3+2) + B(3-3) = 5A$$
$$8 = 5A$$
$$A = \frac{8}{5}$$

para $x = -2$

$$3(-2) - 1 = A(-2+2) + B(-2-3) = -5B$$

$$-7 = -5B$$
$$B = \frac{7}{5}$$

$$\frac{3x - 1}{x^2 - x - 6} = \frac{\frac{8}{5}}{(x-3)} + \frac{\frac{7}{5}}{(x+2)}$$

Paso 5.-Calculamos la Integral

$$\int \frac{3x - 1}{x^2 - x - 6}\, dx = \frac{8}{5}\int \frac{dx}{(x-3)} + \frac{7}{5}\int \frac{dx}{(x+2)}$$

$$\int \frac{3x - 1}{x^2 - x - 6}\, dx = \frac{8}{5}\ln\,(x-3) + \frac{7}{5}\ln\,(x+2) + c$$

$$\int \frac{3x - 1}{x^2 - x - 6}\, dx = \ln\left|(x-3)^{\frac{8}{5}}\right| + \ln\left|(x+2)^{\frac{7}{5}}\right| + c$$

3) $\displaystyle\int \frac{5x + 3}{x^3 - 2x^2 - 3x}\, dx$

$$x^3 - 2x^2 - 3x = x(x^2 - 2x - 3) = x(x-3)(x+1)$$

$$\frac{5x+3}{x^3 - 2x^2 - 3x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{(x-3)} + \frac{C}{(x+1)}$$

$$5x + 3 = A(x-3)(x+1) + Bx(x+1) + Cx(x-3)$$

$$x = 0 \qquad \begin{matrix} x - 3 = 0 \\ x = 3 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} x + 1 = 0 \\ x = -1 \end{matrix}$$

para $x = 0$

$$5(0) + 3 = A(0-3)(0+1) + B(0)(0+1) + C(0)(0-3)$$
$$3 = -3A$$
$$A = -1$$
$$para\ x = 3$$
$$5(3) + 3 = A(3-3)(3+1) + B(3)(3+1) + C(3)(3-3)$$
$$18 = 12B$$
$$B = \frac{12}{18} = \frac{2}{3}$$
$$para\ x = -1$$
$$5(-1) + 3 = A(-1-3)(-1+1) + B(-1)(-1+1) + C(-1)(-1-3)$$
$$-2 = 4C$$
$$C = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$$

$$\int \frac{5x+3}{x^3 - 2x^2 - 3x}dx = \int \frac{-1}{x}dx + \frac{\frac{3}{2}}{(x-3)}dx + \frac{\left(\frac{-1}{2}\right)}{(x+1)}dx = -\ln|x| + \frac{3}{2}\ln|x-3| - \frac{1}{2}\ln|x+1| + c$$

EJEMPLOS: CASO II: Factores lineales repetidos

1.- $\int \frac{3x+5}{x^3-x^2-x+1}dx$

Paso 1.- Factorizando el denominador

$$\left(x^3-x^2-x+1\right)=(x+1)(x-1)^2$$

$$\frac{3x+5}{x^3-x^2-x+1}=\frac{A}{(x+1)}+\frac{B}{(x-1)}+\frac{C}{(x-1)}$$

Como está repetido el factor (x-1), *el mínimo común denominador es :* (x+1)(x-1)

$$3x+5 = A(x-1)^2+B(x+1)+C(x-1)(x+1)$$
$$A\left(x^2-2x+1\right)+Bx+B+C\left(x^2-1\right)$$
$$Ax^2-2Ax+A+Bx+B+Cx^2-C$$
$$(A+C)x^2+(-2A+B)x+(A+B-C)$$

$2(A+C=0)=2A+2C=0$ $-2A+B=3$ $B+2C=3$ $A+C=0 \therefore -A-C=0$ $A+B-C=5$ $B-2C=5$	$B+2C=3$ $B-2C=5$ $2B=8$ $B=\frac{8}{2}$	$-2A+B=3$ $-2A+4=3$ $-2A=3-4$ $-2A=-1$ $A=\frac{1}{2}$	$A+C=0$ $\frac{1}{2}+C=0$ $C=\frac{-1}{2}$

$$\int \frac{3x+5}{x^3-x^2-x+1}dx=\int\left[\frac{\frac{1}{2}}{(x+1)}+\frac{4}{(x-1)^2}-\frac{\frac{1}{2}}{(x-1)}\right]dx=\frac{1}{2}\ln|x+1|-\frac{1}{2}\ln|x-1|+\frac{4}{x-1}+c$$

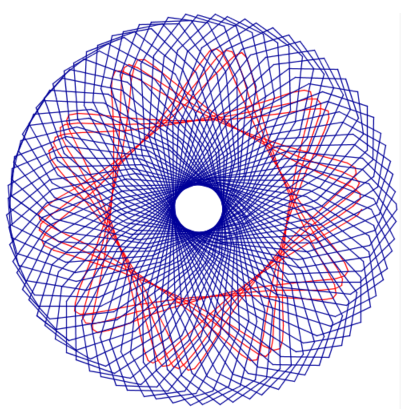
$$=\frac{\ln\left|(x+1)^{\frac{1}{2}}\right|}{\ln\left|(x-1)^{\frac{1}{2}}\right|}+\frac{4}{x-1}+c$$

Actividad IV : Resuelve las siguientes integrales por descomposición en fracciones parciales : Caso I y Cas

1) $\int \frac{dx}{x^2-1}$ **2)** $\int \frac{xdx}{x^2-3x-4}$ **3)** $\int \frac{x^2+3x-4}{x^2-2x-8}dx$ **4)** $\int \frac{(x+1)dx}{x^3+x^2-6x}$

5) $\int \frac{(5x+4)dx}{x^2-2x-8}$ **6)** $\int \frac{(5x^2-10x+8)}{x^3-4x}dx$ **7)** $\int \frac{(3x+5)dx}{x^3-x^2-x+1}$ **8)** $\int \frac{(6x^2-8x+3)dx}{(1-x)^3}$

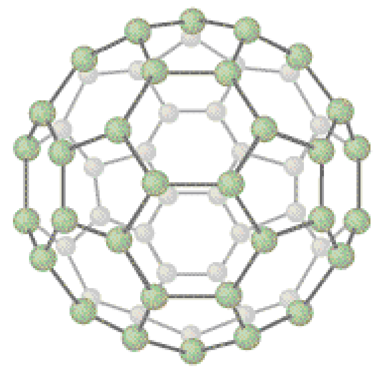
9) $\int \frac{xdx}{(x-2)^2}$ **10)** $\int \frac{4x^2+38x+79}{(x+3)^2(x+5)}dx$



Bibliografía

- *Ayres, F.* “Cálculo Diferencial e Integral”. Serie SCHAUM, Mc Graw-Hill, México.
- *Bosch-Guerra.* “Cálculo Diferencial e Integral”.Ed.Publicaciones Cultural,México
- *Del Grande, D*. “Cálculo Elemental”. Ed. Harla, México
- *Elfriede W.* “ Didáctica _ Cálculo Integral”.Grupo Editorial Iberoamérica.México.
- *Finney,R.L.* “Cálculo de una variable”. ED.Prentice Hall, México
- *Fuenlabrada, S.* “Cálculo Integral”. Ed. Trillas, México
- *Granville,W.A.* “Cálculo diferencial e integral”, Ed. Limusa, México
- *Leithold, L.* “Cálculo”, Ed. Oxford University Press, México
- *Purcell, E.J.* “Cálculo con Geometría Analítica”.Ed.Limusa, México.
- *Stewart, J*. “Calculo de una variable”. Ed.Thompson, México.
- *Swokowsky, E.* “Cálculo con Geometría Analítica”. Ed. Iberoamericana, México.
- *Zill,D.G.* “Cálculo con Geometría Analítica”Ed. Iberoamericana, México.

PÁGINAS ELECTRÓNICAS RECOMENDADAS



- http://www.vitutor.com
- http://www.vadenumeros.es
- *http://www.vadenumeros.es/index.htm*
- http://www.acienciasgalilei.com
- *HTTP://WWW.MATEMATICASBACHILLER.COM*
- *HTTP://WWW.MATEMATICASBACHILLER.COM/TEMARIO/CALCULIN/TEMA_01/INDICE.HTL*