UNIDAD I. NÚMEROS REALES.

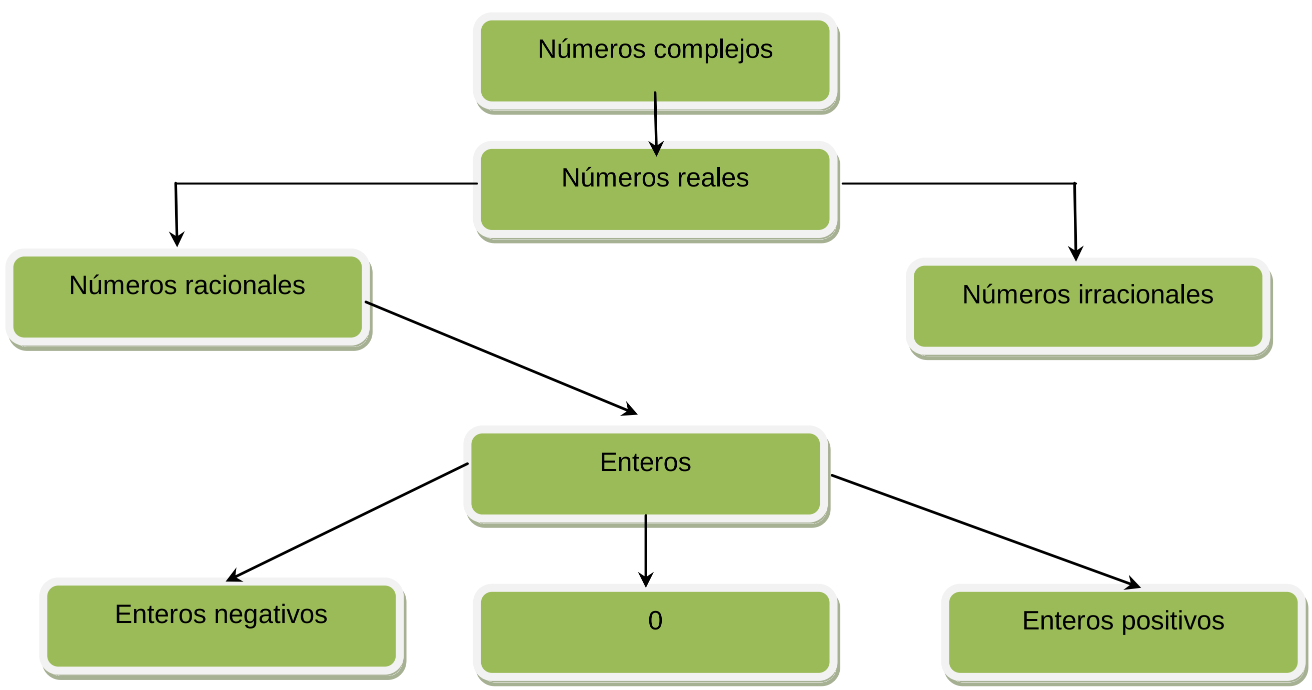
COMPETENCIA PARTICULAR DE LA UNIDAD:

Emplea las operaciones aritméticas y sus propiedades, en los diferentes conjuntos de números, para la solución de problemas relacionados con su entorno académico, personal y social.

RAP 1.
Relaciona los diferentes conjuntos de números que den origen a los números reales y su implicación con la evolución humana.

NÚMEROS

Tipos de números que se utilizan



Todo número real se puede expresar en forma decimal, las representaciones decimales para los números racionales pueden ser terminantes o no terminantes y repetitivas. Por ejemplo, se puede demostrar, con el proceso aritmético de la división larga, que $\frac{5}{4} = 1.25$ $\quad y \quad$ $\frac{177}{55} = 3.2181818.......$

Donde los dígitos 1 y 8 en la representación de $\frac{177}{5}$ se repiten indefinidamente (lo cual, a veces, se indica con 3.21818…). Las representaciones decimales de los números irracionales son siempre no terminantes. Los números reales **son cerrados respecto a la operación de adición**, que se indica con +; esto es a, b de números reales, corresponde exactamente a un número real, **a+b** llamada suma de a y b. Los números reales son también **cerrados respecto a la operación de multiplicación,** que indican con * o bien x; esto es a cada par; a*b que también se representa mediante ab o bien a**x**b que se llama producto de a y b.

Una variable es un símbolo, usualmente una letra, que representa cualquier número de un conjunto específico de números.

Ejemplo

Cómo describiría los número enteros que figuran en las sucesiones siguientes {los enteros forman el conjunto que contienen los números cávales (no fraccionarios) positivos y negativos, y al cero}

a) ….. -15, -10, -5, 0, 5, 10, 15, 20,…..

b) …..-7,-2, 3, 8, 13, 18, 23,…..

Soluciones

Cada entero es un múltiplo de 5. Si n representa un entero, entonces en lenguaje algebraico, cada entero de la sucesión es de la forma 5 veces n, ósea, 5n.

En este caso n se llama variable. Si n se reemplaza por un entero cualquiera, 5 representa un elemento de la sucesión. Si n es 11 entonces 5 n se transforma en 5 veces 11, o sea 55, en consecuencia, es un elemento de la sucesión. Nótese que si no hay signo de operación entre un número y una variable, entonces la operación implicada, es la multiplicación, como 5 n. Pero si la variable se sustituye por un número en específico, entonces para mayor claridad, la multiplicación se indica por medio de un paréntesis o como un punto, como en 5 (11) o bien 5*11.

Ejemplo

Si la empresa de automóviles ACME cobra $16.95 por día mas 0.17 centavos por km por arrendar un automóvil, cuánto costaría alquilarlo por un día? De que depende el precio?

Solución

El costo depende del número de km recorridos, que es la variable en este problema. Por ejemplo, si recorremos 100 km, entonces el costo de 16.95+0.17 (100)=16.95+17=$33.95. Si denotamos por metro el numero de km recorridos, entonces el costo es 16.95+0.17m.

Ejemplo

La tasa de interés típica de una tarjeta de crédito es de 1.5% mensual por los primero $400 y 1%, mensual por la cantidad excedente de $400. Supongamos que solamente compramos un equipo estero. Cuanto interés pagaríamos por el primer mes, durante el cual se ha incurrido con cargos de interés?

Solución.

En este caso, la cantidad de interés depende del precio del estero (recuérdese que el 1.5% =0.015)
Si el estero cuesta $295.98 entonces el interés es de 0.015 ($295.98=4.44)
Si el estéreo cuesta $695, el interés 0.15 (400)+0.01 ($295=$6+$2.95)= $8.95
En general si denotamos el precio del estéreo por S, entonces la cantidad de interés que pagaríamos es:
0.015 S, si S es $\leq$ a 400 (S es menor que o igual a 400)
0.015(400)+0.01(S-400), si S >400 (es mayor que 400)

RAP 2.
Realiza operaciones fundamentales con números reales que se relacionan con situaciones de su entorno.

Si **p** y **q** son números positivos, entonces $\sqrt{p} = q$ significa $q^2 = p(\sqrt{p})$ se lee “la raíz cuadrada de p”

Si un número **a** esta a la izquierda de un número **b** en la recta numérica, entonces **a** es menor que **b**, y escribimos **a<b**. Análogamente si un número **b** está en la derecha del número **a** entonces **b** es mayor que **a**, y escribimos **b>a**.

ADICION	PROPIEDAD	MULTIPLICACION
A +b=b +a	Conmutativa	Ab=ba
(a+b)+c= a+(b+c)	Asociativa	(ab)c=a(bc)
A+0=a	Elemento idéntico	A*1=1
A+(-a)=0	Elemento inverso	A*1/a=1,a $\neq$ 0
Si a+b=c, entonces	Multiplicación por cero	A*0=0
A=c-b y	Operación inversa	Si ab=c y A,b $\neq$ 0, entonces A= $\frac{c}{b}$ y $b=\frac{c}{a}$
B=c-a	Factor cero	Si ab=0, entonces a=0 o b=0

PROPIEDADES DE ADICIÓN Y MULTIPLICACIÓN DE LOS NÚMERO REALES

Donde las fracciones tienen el mismo denominador,

$\frac{a}{c}+-\frac{b}{c}=\frac{a+-b}{c}$, donde $c \neq 0$

Donde las fracciones tienen denominadores diferentes

$\frac{a}{b}+-\frac{c}{d}=\frac{ak}{D}+-\frac{bl}{D}=\frac{ak+-bl}{D}$

Donde D=es igual a bk=dl $\neq$ 0 que es múltiplo común de b y d

Ejemplo

Realizar las siguientes operaciones y expresar las respuestas en términos más simples.

a) $\frac{3}{7}-\frac{2}{7}$

b) $\frac{3}{9}+\frac{2}{3}$

c) $\frac{3}{4}+\frac{1}{6}$

d) $1+\frac{3}{5}-\frac{1}{2}-\frac{1}{6}$

Soluciones

a) $\frac{3}{7}-\frac{2}{7}=\frac{3-2}{7}=\frac{1}{7}$

b) $\frac{3}{9}+\frac{2}{3}=\frac{3}{9}+\frac{2(3)}{3(3)}=\frac{3+6}{9}=\frac{9}{9}=1$ Propiedad fundamental de las fracciones.

Nótese que 9 es el mínimo común denominador.

c) Mínimo común denominador

$$\frac{3}{4}+\frac{1}{6}=\frac{9}{12}+\frac{2}{12}=\frac{11}{12}$$

El mínimo común denominador es 12; 12 es el mínimo común múltiplo de 4 y 6.

$$\frac{3}{4}+\frac{1}{6}=\frac{3*6}{4*6}+\frac{1*4}{6*4}=\frac{22}{24}=\frac{11}{12}$$

Cualquier múltiplo común servirá. El producto de los denominadores es múltiplo de cada denominador. Podríamos haber usado 30,60, etc. Como denominadores, pero usualmente requerirá de una simplificación en la respuesta.

d)

$$1+\frac{3}{5}-\frac{1}{2}-\frac{1}{6}=\frac{30}{30}+\frac{18}{30}-\frac{15}{30}-\frac{5}{30}$$

30 es el mínimo común denominador. Todas las fracciones están redefinidas para tener 30 como denominador.

$$=\frac{30+18-15-5}{30}$$

$=\frac{28}{30}=\frac{14}{15}$ Simplemente la respuesta a los términos más simple.

Ejemplo

Efectuar las siguientes operaciones. Expresar las respuestas en los términos más simples.

a. $\frac{3}{10}\div\frac{24}{5}+1$ b. $2+\frac{2}{3}\left(1-\frac{3}{5}\right)$ c. $\dfrac{\frac{3}{4}+\frac{12}{5}}{\frac{3}{10}}$

Soluciones.

Nota: para evitar equivocaciones, conviene multiplicar y dividir antes de sumar o restar. Para delimitar el orden de las operaciones, se utilizan paréntesis

$\frac{3}{10}\div\frac{24}{5}+1=\frac{3}{10}\div\frac{5}{24}+1$ Divídase antes de sumar

$=\frac{15}{240}+1=\frac{1}{16}+1$ Simplifíquese la fracción

$=\frac{1}{16}+\frac{16}{16}$ Transfórmese el 1

$=\frac{17}{16}$ Súmese

En la expresión $2+\frac{2}{3}(1-\frac{3}{5})$, la multiplicación $\frac{2}{3}(1-\frac{3}{5})$, debe hacerse primero. Pero $2+\frac{2}{3}(1-\frac{3}{5})$ puede hacerse de 2 maneras. Ya sea distribuyendo la multiplicación en la resta o combinando los números dentro del paréntesis y luego multiplicar.

$$2+\frac{2}{3}\left(1-\frac{3}{5}\right)=2+\frac{2}{3}-\frac{2}{3}\left(\frac{3}{5}\right) \quad \text{ó} \quad =2+\frac{2}{3}\left(\frac{2}{5}\right)$$

$$=2+\frac{2}{3}-\frac{2}{5} \qquad =2+\frac{4}{15}$$

$$=\frac{30}{15}+\frac{10}{15}-\frac{6}{15} \qquad =\frac{30}{15}+\frac{4}{15}$$

$$=\frac{34}{15} \qquad =\frac{34}{15}$$

$$\frac{(3/4)+(12/5)}{3/10}=\left(\frac{3}{4}+\frac{12}{5}\right)\div\frac{3}{10}$$ $$\frac{p}{q}=p\div q$$

$$=\left(\frac{15+48}{20}\right)\div\frac{3}{10}$$

$$=\frac{63}{20}\div\frac{3}{10}$$

$$=\frac{63}{20}*\frac{3}{10}$$

$$=\frac{21}{2}$$

Podríamos también simplificar primero el numerador:

$$\frac{(3/4)+(12/5)}{3/10}=\frac{(63/20)}{3/10}=\frac{63}{20}\div\frac{3}{10}=\frac{63}{20}*\frac{10}{3}=\frac{21}{2}$$

Una razón de número b a un número c(c $\neq$ 0) es el coeficiente $\frac{b}{c}$

REGLAS PARA EL ORDEN DE OPERACIONES

1. En una expresión con varias operaciones y paréntesis:
2. Simplifique primero cualquier expresión dentro de un símbolo de inclusión (paréntesis redondos, corchetes, llaves, barras de fracción, etc.) trabajando siempre a partir de los dos símbolos de inclusión mas internos.
3. Después multiplique y divida según se encuentra en orden de izquierda a derecha.
4. Por último, sume y reste en orden de izquierda a derecha.

$x^0=1$ Para todos los números reales, $x\neq 0; x^{-n}=1/x^n$ para todos los números reales, y n es cualquier entero positivo.

Ejemplo
Simplificar las siguientes expresiones.

a. $(10^{-5})^6$ c. $(10^{-5})(10^6)$ e. $\frac{10^5}{10^{-6}}$ f. $\frac{10^{-5}}{10^{-6}}$

b. $(10^{-5})^{-6}$ d. $(10^{-5})^{(10^{-6})}$

Soluciones
a)

$$(10^{-5})^6=\left(\frac{1}{10^5}\right)^6$$

$$=\frac{1}{30^{30}}$$ O bien 10^{-30}

Pero $1/30^{30}=10^{-30},$ por lo cual se tiene $(10^{-5})^6$

$$(10)^{(-5)6}=(10)^{(-5)(6)}=10^{-30}$$

b)

$$(10^{-5})^{-6}=\left(\frac{1}{10^5}\right)^{-6}$$ Podría efectuarse $1/(10^{-5})^6$ primero

$$= \frac{1}{\left(\frac{1}{10^5}\right)^6}$$ Debe tenerse cuidado con los paréntesis

$$= \frac{1}{\left(\frac{1}{10^{30}}\right)}$$

$=10^{30}$ Por lo tanto $(10^{-5})^{-6} = 10^{(-5)(-6)} = 10^{30}$

c)

$= (10^{-5})(10^6) = \frac{1}{10^5} \bullet 10^6$

=10

d)

$= (10^{-5})(10^{-6}) = \frac{1}{10^5} \bullet 10^6$

=10 Así $= (10^{-5})(10^{-6}) = 10^{-5+6} = 10^1$

$= \frac{1}{10^{11}}$ O bien 10^{-11}

De nuevo se observa que $(10^{-5})(10^{-6}) = 10^{-5(+6)} = 10^{-11}$

e)

$\frac{10^5}{10^{-6}} = 10^5 * \frac{1}{10^{-6}}$

$= 10^{-5} * 10^{-6}$

$= 10^{11}$

Así $\frac{10^5}{10^{-6}} = 10^{5(-6)} = 10^{11}$

f)

$\frac{10^5}{10^{-6}} = \frac{1}{10^5} * 10^6$

Así $\frac{10^5}{10^{-6}} = 10^{-5-(-6)} = 10$

Un número está escrito en notación científica si se expresa en la forma $m*10^c$ Donde c es cualquier entero y m es mayor que o igual a 1 y menor que 10. Esto es, $1 \le m < 10$

Ejemplo

Una computadora puede realizar un cálculo aritmético en $2.4x10^{-9}$ segundos. ¿Cuántos cálculos aritméticos semejantes puede realizar la computadora en:

a) ¿1 minuto? b) ¿24 horas?

Soluciones

60 segundos = 1 minuto. El número de cálculos resueltos en un minuto es igual:

$$\frac{1\,\text{calculo}}{2.4x10^{-9}\ \text{segundos}} x\ 60\ \text{segundos}$$

$$= \frac{60}{2.4x10^{-9}} = \frac{6x10}{2.4x10^{-9}} = \frac{6x10^{10}}{2.4} = 2.5x10^{10}$$

24 horas = 60x60x24 segundos. El número de cálculos resueltos en 24horas es igual a:

$$\frac{60x60x24}{2.4x10^{-9}} x \frac{6x6x2.4x10^{3}}{2.4x10^{-9}} = 3.6x10^{13}$$

Estas respuestas explican por qué las computadoras son tan populares.

NOTACIÓN EXPONENCIAL

Caso general "(n es cualquier número positivo)"	Casos especiales
$a^n = a \cdot a \cdot a.....a$ "n" factores de a	$a^1 = a$ $a^2 = a \cdot a$ $a^3 = a \cdot a \cdot a$ $a^6 = a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a$

Exponentes CERO y NEGATIVOS

A continuación se amplía la definición de a^n, a exponentes no positivos.

Definición $a^n = a \cdot a \cdot a....a$	Ejemplo
$a^0 = 1$ $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$	$3^0 = 1, (\sqrt{2})^0 = 1$ $5^{-3} = \frac{1}{5^3}, 3^{-5} = \frac{1}{3^5}$

Si "m" y "n" son enteros positivos, entonces

$$a^m a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a.... \cdot a}_{\text{m factores de de a}} \quad \underbrace{a \cdot a \cdot a........ \cdot a}_{\text{n factores de a}}$$

Como el número total de factores de "a" en el lado derecho es "m" +"n", esta expresión es igual a

$$a^m a^n = a^{m+n}$$

Se puede ampliar esta fórmula a m$\leq$0 o bien n$\leq$0, mediante las definiciones de exponente 0 y negativo. Esto da como resultado la regla o ley (1), que aparece con la tabla siguiente para desarrollar la ley 2, se puede escribir, para m y n positivos.

$$(a^m)^n = \underbrace{a^m \bullet a^m \bullet a^m \bullet a^m \bullet \cdots \bullet a^m \bullet a^m}_{\text{n factores de } a^m}$$

Y se cuenta el número de veces que aparece **a** como factor en el lado derecho. Como $a^m = a \cdot a \cdot a........ \cdot a$ donde a es factor m veces, y como el número de esos grupos de m factores n, el número total de factores de a es m*n.

$(a^m)^n = a^{mn}$

Se puede demostrar los casos de $m \leq 0$ o de $n \leq 0$, con la definición de exponentes no positivos. Las 3 leyes restantes pueden demostrarse de una forma semejante, contando los factores. En las leyes 4 & 5 se supone que los denominadores no son 0.

TEOREMA SOBRE EXPONENTES NEGATIVOS

1) $\dfrac{a^{-m}}{b^{-n}} = \dfrac{b^n}{a^m}$ 2) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\dfrac{b}{a}\right)^n$

DEMOSTRACIÓN

Con las propiedades de los exponentes negativos y los cocientes, se obtiene

1) $\dfrac{a^{-m}}{b^{-n}} = \dfrac{1/a^m}{1/b^n} = \dfrac{1}{a^m} \cdot \dfrac{b^n}{1} = \dfrac{b^n}{a^m}$

2) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-n} = \dfrac{a^{-n}}{b^{-n}} = \dfrac{b^n}{a^n} = \left(\dfrac{b}{a}\right)^n$

Ejemplo
Simplificación de expresiones que tienen exponentes negativos
Simplificar

a) $\dfrac{8x^3y^{-5}}{4x^{-1}y^2}$ b) $\left(\dfrac{u^2}{2v}\right)^{-3}$

SOLUCIÓN

a) $\dfrac{8x^3y^{-5}}{4x^{-1}y^2} = \dfrac{8x^3}{4y^2} \cdot \dfrac{y^{-5}}{x^{-1}}$

Reordenación de cocientes para que los exponentes negativos queden en una fracción

$= \dfrac{8x^3}{4y^2} \cdot \dfrac{y^1}{x^5}$ Teorema sobre exponentes negativos (1)

$= \dfrac{2x^4}{y^7}$ Ley uno de los exponentes

b) $\left(\dfrac{u^2}{2v}\right)^{-3} = \left(\dfrac{2v}{u^2}\right)^3$ Teorema sobre exponentes negativos (2)

$= \dfrac{2^3v^3}{(u^2)^3}$ Leyes 4 y 3 de los exponentes

$= \dfrac{8v^3}{u^6}$ Ley dos de los exponentes

Propiedades de $\sqrt[n]{\ }$ (n es un entero positivo)	
PROPIEDAD	**EJEMPLO**
1) $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a, \quad si\ \sqrt[n]{a} \quad existe$	$\left(\sqrt{5}\right)^2 = 5,$ $\left(\sqrt[3]{-8}\right)^3 = -8$
2) $\sqrt[n]{a} = a,\ si\ a \geq 0$	$\sqrt{5^2} = 5,$ $\sqrt[3]{2^3} = 2$
3) $\sqrt[n]{a^n} = a,\ si\ a\ < 0\ y\ n\ es\ impar$	$\sqrt[3]{(-2)} = -2,$ $\sqrt[5]{(-2)^5} = -2$
4) $\sqrt[n]{a^n} = lal,\ si\ a < 0\ y\ n \quad es\ \ par$	$\sqrt{(-3)^2} = l-3l) = 3,$ $\sqrt[4]{(-2)} = l-2l-2$

Si $a \geq 0,$ entonces la propiedad 4 se reduce a la propiedad 2. Se observan también que, según la propiedad 4.

$$\sqrt{x^2} = \text{lxl}$$

Para todo número real x, en especial, $si\ x \geq 0, entonces\ \sqrt{x^2} = x$ sin embargo, $\text{si} < 0,$ entonces $\sqrt{x^2} = -x$, que es positivo. Las tres leyes que parecen en la tabla siguiente son validas para enteros positivos m y n, siempre y cuando existan las raíces indicadas.

LEYES DE LOS EXPONENTES

LEY	EJEMPLO
1) $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$	$\sqrt{50} = \sqrt{25 \cdot 2} = \sqrt{25}\sqrt{2} = 5\sqrt{2}$ $\sqrt[3]{-108} = \sqrt[3]{(-27)(4)} = \sqrt[3]{27}\sqrt[3]{4} = -3\sqrt[3]{4}$
2) $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$	$\sqrt[3]{\frac{5}{8}} = \frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{8}} = \frac{\sqrt[3]{5}}{2}$
3) $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$	$\sqrt{\sqrt[3]{64}} = \sqrt[3(2)]{64} = \sqrt[6]{2^6} = 2$

Los radicales en las leyes 1 y 2 incluyen productos y cocientes. Se debe tener cuidado si en el radicando se tienen sumas o restas. La tabla siguiente presenta dos casos precautorios particulares de igualdades que ocurren con frecuencia al trabajar con radicales que tienen suma.

PRECAUCIÓN

SI $a \neq y b \neq 0$	EJEMPLO
$\sqrt{a^2 + b^2} \neq a + b$	$\sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5 \neq 3 + 4 = 7$
$\sqrt{a + b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$	$\sqrt{4 + 9} = \sqrt{13} \neq \sqrt{4} + \sqrt{9} = 5$

PROPIEDAD DISTRIBUTIVA

$a(b + c) \quad + \quad ab + ac$ ⇨ Una suma con dos términos

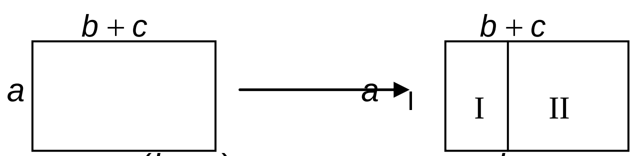
un producto con
dos factores

Es la propiedad distributiva, el proceso de ir de izquierda a derecha se llama multiplicar y el proceso de ir de derecha a izquierda se llama factorizar.

Multiplicando

$$a(b + c) \quad = \quad ab + ac$$

Factorizando



Área = $a(b + c)$ = $ab + ac$

Área del rectángulo I + área del rectángulo II

Ejemplo

Escribir cada uno de los siguientes productos como una semana o como una diferencia de términos. Esto es, realice la operación indicada.

a) $3(x + 2)$

b) $(2x - 1)x$

c) $5(a + b + c)$

d) $-2(1 - x)$

SOLUCIONES

a)

$$3(x + 2) = 3x + 3(2).$$
$$= 3x + 6$$

b)

$$(2x - 1)x = x(2x - 1)$$
$$= x(2x) - x(1)$$
$$= 2x^2 - x$$

c)

$$5(a+b+c)=5\{(a+b)+c\}$$
$$=5(a+b)+5c$$
$$=5a+5b+5c$$

d)

$$-2(1-x)=-2\{1+(-x)\}$$
$$=(-2)(1)+(-2)(-x)$$
$$=2+2x$$

Advertencia: téngase precaución con una cantidad negativa enfrente del paréntesis. Las reglas para expresiones algebraicas son las mismas que para aquellas expresiones aritméticas. Recuérdese que:

$$-(a+b)=(-a)+(-b)=-a-b$$
$$-(a-b)=-\{a+(-b)\}=-a+b$$

Ejemplo

Escribir cada una de las siguientes sumas o diferencias como un producto. Este proceso se llama factorización.

a) $5a+a$
b) $5x+3x$
c) $2y+2y+2y+2y$
d) $20x^2-15x^4y$
e) $6a^3b-3b^3+9a^3b^2$
f) $3(a-1)-b(a+1)$

SOLUCIONES

a)

$$5a+a=5a+1*a$$
$$=(5+1)a$$ Recuérdese que a=1*a* La propiedad distributiva
$$=6a$$

b)

$$5x+3x=(5+3)x$$
$$=8x$$

c)

$$2y+2y+2y+2y=(2+2+2+2)y$$
$$=8y$$

d)

$$20x^2-15x^4y=(5x^2)(4)-(5x^2)(3x^2y)$$

Factorice cada termino para hallar el factor común más grande de cada término

$$=(5x^2)(4-3x^2y)$$

Utilice la propiedad distributiva para factorizar los factores comunes de cada término.

RAP 3.
Emplea los algoritmos de las operaciones aritméticas en solución de problemas de su ámbito personal, social y global.

EJEMPLO 1.

Un faro se enciende cada 12 segundos, otro cada 18 segundos y un tercero cada minuto. A las 6.30 de la tarde los tres coinciden.
Averigua las veces que volverán a coincidir en los cinco minutos siguientes.

Solución
$12 = 2^2 \cdot 3$
$18 = 2 \cdot 3^2$
$60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$

m. c. m. (12, 18, 60) = 22 · 32 · 5= 180

180: 60 = 3

Sólo a las 6.33 h.

EJEMPLO 2.

En una bodega hay 3 toneles de vino, cuyas capacidades son: 250 l, 360 l, y 540 l. Su contenido se quiere envasar en cierto número de garrafas iguales. Calcular las capacidades máximas de estas garrafas para que en ellas se puedan envasar el vino contenido en cada uno de los toneles, y el número de garrafas que se necesitan.

Solución
m. c. d. (250, 360, 540) = 10
Capacidad de las garrafas = 10 l.
Número de garrafas de T_1 = 250 / 10 = 25
Número de garrafas de T_2 = 360 / 10 = 36
Número de garrafas de T_3 = 540 / 10 = 54
Número de garrafas = 25 + 36 + 54 = **115 garrafas**.

EJEMPLO 3.

Para preparar un pastel, se necesita:

1/3 de un paquete de 750 g de azúcar.
3/4 de un paquete de harina de kilo.
3/5 de una barra de mantequilla de 200 g.
Halla, en gramos, las cantidades que se necesitan para preparar el pastel.

Solución
$$\frac{1}{3} \cdot 750 = 250 \text{ g}$$
$$\frac{3}{4} \cdot 1000 = 750 \text{ g}$$
$$\frac{3}{5} \cdot 200 = 120 \text{ g}$$

EJEMPLO 4.
Los 2/5 de los ingresos de una comunidad de vecinos se emplean combustible, 1/8 se emplea en electricidad, 1/12 en la recogida de basuras, 1/4 en mantenimiento del edificio y el resto se emplea en limpieza.
¿Qué fracción de los ingresos se emplea en limpieza?

Solución

$$\frac{2}{5}+\frac{1}{8}+\frac{1}{12}+\frac{1}{4}=\frac{48+15+10+30}{120}=\frac{103}{120}$$

$$1-\frac{103}{120}=\frac{120-103}{120}=\frac{17}{120}\text{ en limpieza}$$

De acuerdo con la fracción de ingresos empleada, ordena las partidas enumeradas de menor a mayor

$$\frac{1}{12}<\frac{1}{8}<\frac{17}{120}<\frac{1}{4}<\frac{2}{5}$$

EJEMPLO 5.

Una bomba extrae el petróleo de un pozo a 975 m de profundidad y lo eleva a un depósito situado a 48 m de altura. ¿Qué nivel supera el petróleo?

48 − (−975) = 48 + 975 = **1023 metros**

EJEMPLO 6.

En un depósito hay 800 l de agua. Por la parte superior un tubo vierte en el depósito 25 l por minuto, y por la parte inferior por otro tubo salen 30 l por minuto. ¿Cuántos litros de agua habrá en el depósito después de 15 minutos de funcionamiento?

800 + 25 · 15 − (30 · 15) =

800 + 375 − 450 = 1175 − 450 = **725 l**

EJEMPLO 7.

De los 800 alumnos de un colegio, han ido de viaje 600. ¿Qué porcentaje de alumnos ha ido de viaje?

800 alumnos $\longrightarrow$ 600 alumnos

100 % $\longrightarrow$ x %

$$\frac{800}{100}=\frac{600}{x} \qquad x=\frac{600\cdot 100}{800}=75\%$$

EJEMPLO 8.

Dos ruedas están unidas por una correa transmisora. La primera tiene un radio de 25 cm y la segunda de 75 cm. Cuando la primera ha dado 300 vueltas, ¿cuántas vueltas habrá dado la segunda?

25 cm $\xrightarrow{I}$ 300 vueltas

75 cm $\longrightarrow$ x vueltas

$$\frac{75}{25}=\frac{300}{x} \qquad x=\frac{300\cdot 25}{75}=100\text{ vueltas}$$

EJEMPLO 9.

Se asocian tres individuos aportando 5000, 7500 y 9000 €. Al cabo de un año han ganado 6 450 €. ¿Qué cantidad corresponde a cada uno si hacen un reparto directamente proporcional a los capitales aportados?

$$\frac{x}{5000}=\frac{y}{7500}=\frac{z}{9000}=\frac{x+y+z}{21\,500}=\frac{6450}{21\,500}$$

$$\frac{x}{5000}=\frac{6450}{21\,500} \qquad x=\frac{6\,450\cdot 5000}{21\,500}=1500\text{ €}$$

$$\frac{y}{7500}=\frac{6450}{21\,500} \qquad y=\frac{6\,450\cdot 7500}{21\,500}=2250\text{ €}$$

$$\frac{z}{9000} = \frac{6450}{21\,500} \qquad z = \frac{6\,450 \cdot 9000}{21\,500} = 2700\,€$$

EJEMPLO 10.

11 obreros labran un campo rectangular de 220 m de largo y 48 de ancho en 6 días. ¿Cuántos obreros serán necesarios para labrar otro campo análogo de 300 m de largo por 56 m de ancho en cinco días?

220 · 48 m² $\xrightarrow{D}$ 6 días $\xrightarrow{I}$ 11 obreros

300 · 56 m² $\longrightarrow$ 5 días $\longrightarrow$ x obreros

$$\frac{220 \cdot 48}{300 \cdot 56} \cdot \frac{5}{6} = \frac{11}{x} \qquad x = \frac{300 \cdot 56 \cdot 6 \cdot 11}{220 \cdot 48 \cdot 5} = 21 \text{ obreros}$$

EJERCICIOS

1. Obtén el valor de cada una de las siguientes expresiones, escribe tus procedimientos:

a. $\left[-2(4-6)^2\right]^2-4\left[-3(6\div 3)^2\right]=$

b. $2\left(3+\frac{2}{5}\right)\div\left(\frac{3}{5}\right)^2=$

c. $64\left(\frac{1}{2}\right)\div 8+\frac{3}{4}=$

d. $\frac{2}{3}+\frac{3}{8}\left(\frac{4}{5}\right)=$

e. $32\div 8(4)-4(7)+3=$

f. $\frac{5}{6}+\frac{1}{6}\div\frac{3}{2}=$

g. $\frac{1}{2}-\frac{3}{5}\left(\frac{5}{4}\right)+\frac{1}{8}=$

h. $\frac{5}{6}+\frac{7}{12}-\frac{11}{16}=$

i. $-4^2+8\div 2(5)+3=$

j. $\frac{17}{20}+\frac{3}{20}\div\left(\frac{2}{3}-\frac{7}{10}\right)=$

k. $13-3(5)+6(-8)+11=$

l. $\frac{2}{3}\left(\frac{3}{4}-\frac{5}{9}\right)+\frac{5}{6}=$

m. $\frac{2}{3}-\frac{1}{8}+\frac{9}{16}=$

n. $\frac{7}{11}-\frac{7}{11}\left(\frac{11}{14}+\frac{11}{7}\right)=$

o. $\left(\frac{2}{7}+\frac{3}{8}\right)-\frac{3}{112}=$

p. $3+\left(4^2-10\right)^2-3=$

q. $\left[12-(4\div 2)^2\right]+5=$

r. $\frac{2}{3}+4\div 3^2=$

s. $5^2-2^2(4-2)^2=$

t. $2.5+7.56\div 2.1+(0.2)^2=$

u. $\frac{2}{3}\left(\frac{3}{4}-\frac{5}{9}\right)+\frac{5}{6}=$

v. $3+\left(4^2-10\right)^2-3=$

w. $13-3(5)+6(-8)+11=$

x. $5^2-2^2(4-2)^2=$

y. $2.5+7.56\div 2.1+(0.2)^2=$

z. $\frac{(2^2)^4}{(3^2)^2} - (5)^2 + 6\left(\frac{1}{6}\right) - \sqrt{49} =$

2. Obtén el valor de cada una de las siguientes expresiones, escribe tus procedimientos:

   a. $a(a-1)-2a^2 =$

   b. $(x+y)^2-(x+y)(x-y) =$

   c. $\frac{15x^{10}y^5-3x^6y^6}{6(x^2y)^3} =$

   d. $\frac{x(x-y)-y(y-x)}{xy} =$

   e. $m-\{3m^2n-(m-1)\}+\{n(2m^2+n)\} =$

3. Resuelve cada una de las siguientes ecuaciones para x y compruebe sus respuestas:

   a. $7-2x=-(3x-2)+2(x-5)$

   b. $5x+2(3x-1)=-1-5(x-3)$

   c. $\frac{3x}{2}-\frac{2(x+1)}{3}=3-\frac{x}{2}$

   d. $\frac{4x-1}{5}-\frac{2x-3}{3}=\frac{2}{5}$

   e. $4\{2+3[x-2-(-2x)]\}=36x-17$

   f. $\frac{\frac{7}{9}}{x}=\frac{\frac{8}{9}}{\frac{3}{4}}$

   g. $\frac{2m}{3m+3}-\frac{m+2}{6m+6}=\frac{m-6}{8m+8}+\frac{5}{12}$

   h. $\frac{1}{r-1}+\frac{2}{3r-3}=\frac{-5}{12}$

   i. $\frac{3}{x-2}+\frac{2}{x+2}=\frac{12}{x^2-4}$

   j. $\frac{3}{4a-8}-\frac{2}{3a-6}=\frac{1}{36}$

PROBLEMAS TIPO

4. Para instalar un teléfono se necesitan 14 metros de cable. ¿Cuántos teléfonos se podrán instalar con 182 metros de cable?

5. Un colegio tiene cupo para 1450 alumnos. Si ya se inscribieron 647 hombres y 586 mujeres, ¿cuál es el cupo disponible?

6. Si sabemos que la suma de un protón es de 16×10^{-23} gr. Calcula la masa de 9 millones de protones.

7. Un electricista compró 75 metros de alambre de calibre 14. Usó las dos quintas partes en una instalación; del resto, guardó el 20% y la cantidad restante la dividió en trozos de 80 cm de longitud. ¿Cuántos trozos son? ¿Para qué otras longitudes del alambre se obtienen trozos completos?

8. Calcula el número de alumnos de una clase sabiendo que la octava parte de ellos no asistió a la clase, que las tres quintas partes de ellos están presentando un examen y los once restantes están estudiando. ¿Cuántos no asistieron?

9. Juan gana dos tercios de lo que percibe Pedro, quién gana 4/5 de lo que percibe Tadeo. Si Tadeo gana $1,150.00, ¿cuánto perciben Juan y Pedro?

10. Yolanda está a cargo de una tortillería y ha decidido establecer el precio de $4.50 el kilogramo. Algunos de sus clientes compran por pesos (es decir, compran $1, $1.50, $2, ..., $29.5 ó $30) y otros por kilos (1, 1.5, 2, ..., 15 Kg). Necesita dos tablas para saber cuánto les debe dar de tortillas a los primeros y cuánto les debe cobrar a los segundos. ¿Puedes ayudarle a Yolanda en la elaboración de estas dos tablas?

11. Una anciana decrépita y desdentada fue a vender una canasta de huevos al mercado.
    Al primer cliente le vendió la mitad de los huevos que llevaba, más medio huevo; al segundo cliente le vende la tercera parte de los huevos que le quedaban más un tercio de huevo; el tercer cliente le compra la cuarta parte de los huevos restantes, más un cuarto de huevo.
    Después de sus ventas, la anciana aún tenía en la canasta, 8 huevos. Si no se rompió ningún huevo, ¿cuántos huevos tenía inicialmente en la canasta?

12. La razón entre los gastos y las entradas en el negocio de los Romano´s es de 5 a 8. ¿Cuáles fueron sus gastos en un mes en el que la ganancia fue de $3,675?

13. Un nanosegundo es 10-9 segundos. ¿Cuántos nanosegundos requiere la luz para darle la vuelta a la Tierra?

14. Supongamos que una máquina copiadora amplifica una copia de papel alrededor de 1.1 veces el original. Si usted sacara copias de copias y una hoja original fuese de 10 cm por 16 cm, ¿Cuáles serían las dimensiones de la segunda, tercera y octava copia? ¿Cuántas amplificaciones se requieren para lograr una amplificación del triple del original?

15. Una hoja de papel se dobla a la mitad, y luego nuevamente a la mitad. Si este procedimiento de doblar a la mitad continúa y el papel se desdobla, ¿cuántos espacios habrá después de un doblez? ¿dos dobleces? ¿tres dobleces? ¿cinco dobleces? ¿diez? ¿cien?

16. Hay que tender un cable desde una central eléctrica a un lado de un río de 900 metros de ancho a una fábrica en el otro lado 3 kilómetros abajo. El costo de tender el cable bajo el agua es de $400 por cada metro, mientras que el costo por tierra es de $320 por cada metro. ¿Cuál es la ruta más económica para tender el cable?

17. Un viajero recorre ¼ de la distancia entre dos ciudades a pie, 1/5 a caballo, 1/8 del resto en auto y los 55 km restantes en tren. ¿Cuál es la distancia entre las dos ciudades?

18. Una cuadrilla de 15 hombres se compromete a terminar en 14 días cierta obra. Al cabo de 9 días sólo han hecho los 8/17 de la obra. ¿Con cuántos hombres tendrán que reforzar la cuadrilla para terminar la obra en el tiempo fijado?

19. Carlos consigue un préstamo de $100,000 para comprarse un automóvil. Conviene en pagar su deuda de la siguiente forma: cada año pagará $10,000 más el 12% de interés de su deuda al principio de año. ¿Cuánto pagará al final por el préstamo?

20. Al inicio de un viaje el odómetro de un automóvil (con tanque lleno) registra 43,219,5 km. Después del viaje, que tardó seis horas, el odómetro registra 43, 480,2 km y el conductor utilizó 39.5 litros de gasolina para volver a llenar el tanque.
    a. ¿Cuántos kilómetros por litro rindió el automóvil?
    b. ¿Cuál fue la velocidad promedio en el viaje?

21. A la edad de dos años, un niño promedio mide unos 86 cm y pesa 13 kg. Emplea la fórmula de DuBois y DuBois.

$S = (0.007184)w^{0.425}h^{0.725}$

(Donde w es el peso y h la estatura) para hallar la superficie S del cuerpo del niño (en metros cuadrados).

22. De un número N, de dos dígitos, se sustrae un número que tiene los mismos dígitos de N pero invertidos. El resultado es el cubo de otro número positivo. ¿Cuáles son los valores posibles de N?

PROBLEMAS EXTRAS

1. **Las caritas de don Cubo**
   Un cubo de madera que mide 20 cm de lado se pinta de amarillo. Una vez seca la pintura, se corta en cubos de 2 cm de lado. ¿Cuántos de estos cubos chicos no están pintados en ninguna de sus caritas?

2. **La tribu y los tribunos**
   En mi tribu, cuando se colocan de dos en fondo sobra uno, cuando se colocan de tres en fondo sobra uno, cuando se colocan de cuatro en fondo sobra uno, cuando se colocan de cinco en fondo sobra uno, cuando se colocan de seis den fondo sobra uno, y, por fin, cuando se colocan de siete en fondo quedan distribuidos exactamente.
   (a) ¿Cuántos tribunos hay en mi tribu?
   (b) Escribe una explicación detallada de todo lo que hiciste para obtener tu respuesta.

3. **El vendedor de enciclopedias**
   Un vendedor de enciclopedias tiene un salario base de 700 pesos mensuales más una comisión del 8% de las ventas que realiza por encima de 4000 pesos. En cada uno de los meses pasados vendió las cantidades anotadas en la tabla.

MES	abril	mayo	junio	julio	agosto
VENTAS	3476	4142	5276	3962	6199

   (a) Calcula los ingresos que le corresponden al vendedor de enciclopedias cada mes.
   (b) Diseña un método gráfico para pagarle a un vendedor que trabaje con el mismo contrato.
   (c) Haz un diagrama de flujo con el algoritmo que se usa para pagarle a un vendedor que trabaje con el mismo contrato.
   (d) Con base en el punto anterior haz un programa de computadora o de calculadora y pruébalo con los datos de la tabla.
   (e) Inventa un problema inspirado en el problema anterior.

4. **La zorra y el perro**
   Una zorra da 2 y 1/3 saltos por cada segundo. Cuando ha avanzado 30 y 1/4 saltos, se suelta un perro para que la persiga. El perro da 4 y 1/2 saltos por cada segundo. ¿Cuánto tardará el perro en alcanzar a la zorra?
   Cuestionario
   (1) Expresa en forma de fracción común impropia el número de saltos que lleva de ventaja la zorra.
   (2) Después de un segundo de la salida del perro, imagina que tomas una foto instantánea y descríbela cuantitativamente.
   (3) Haz una tabla que describa las posiciones de los animales en cada segundo.
   (4) ¿Qué significa que las posiciones de los animales sean la misma?
   (5) Haz otra tabla en la que aparezcan los mismos renglones y columnas que en la anterior, pero escribe las cantidades indicando las operaciones que realizaste, sin efectuarlas.
   (6) Identifica la estructura de cada una de las cantidades que relaciona tu tabla y expresa la relación mediante una ecuación.
   (7) ¿Cómo verificas que tu solución es correcta? Explica.
   (8) ¿Qué aprendizajes utilizaste para resolver el problema?
   (9) En caso de no haberlo resuelto, escribe tus conclusiones, con una reflexión sobre las causas de que no lo hayas podido resolver.
   (10) ¿Qué caminos o estrategias seguiste para tratar de resolver el problema?
   (11) Aplica el modelo PER (Propósito, Estrategia, Resultado).

5. **Las ballenas de Alaska**
   En un estudio reciente se afirma que la población actual de ballenas en Alaska está entre 5700 y 10600 y que la diferencia entre los nacimientos y las muertes naturales da lugar a un crecimiento de

aproximadamente 3% anual. Los esquimales de Alaska tienen permiso para cazar 50 ballenas cada año para su supervivencia.
Cuestionario

(1) Supongamos que en 2000 la población de ballenas era de 5700.
  a) ¿Cuál es el cambio en un año en esta población debido a la diferencia entre los nacimientos y las muertes naturales?
  b) ¿Cuál es el cambio en un año debido a la cacería de los esquimales?
  c) ¿Cuál sería la población de ballenas en 2001?

(2) Escribe las instrucciones para calcular a partir de la población de un año dado la población del año siguiente. De ser posible hazlo en tu calculadora.
  d) Haz una tabla con tus estimaciones hasta el año 2010. Traza una gráfica.
  e) Haz otra tabla pero supón ahora que la población en 2000 era de 10600. Traza una gráfica.

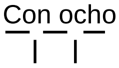
(3) Aplica la estrategia ‘¿Qué pasaría si. . .?’ con respecto al volumen de caza permitido. Escribe tus conclusiones.

(4) En este estudio hiciste estimaciones para varios años futuros, basándote en las tendencias de crecimiento del pasado.
  f) ¿Qué cálculos tuviste que hacer para estimar el cambio en el número de ballenas de un año al siguiente? Aplica la estrategia de ‘indicar sin efectuar’ para identificar la expresión algebraica que relaciona el tiempo y la población.
  g) ¿Cómo puedes predecir la población de ballenas dentro de muchos años?
  h) ¿Qué semejanzas y qué diferencias adviertes entre el patrón de cambio de la población de las ballenas y el de los seres humanos?

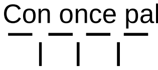
6. Sucesiones

Escaleras

Con ocho palillos puedes hacer una escalera de dos peldaños.



Con once palillos puedes hacer una escalera de tres peldaños.



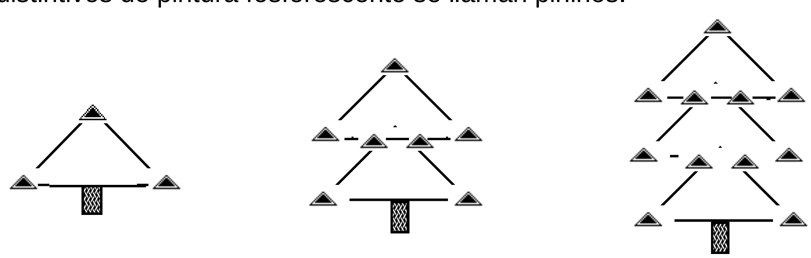
¿Cuántos palillos necesitas para hacer una escalera de 20 peldaños?
¿Y para hacer una escalera de 1000 peldaños?

Una sucesión numérica

Llena los espacios de la sucesión numérica que continúa con el mismo patrón: 4, 10, 16, 22, 28, , , , , , , ,
¿Cuál es el 10º término de la sucesión? ¿Y el 100º? ¿Y el n-ésimo?

Los pininos

Puedes dibujar pinos de diferentes tamaños pero siempre con el mismo diseño. Aquí tienes tres ejemplos. Por sus brochazos distintivos de pintura fosforescente se llaman pininos.



tamaño 1 — 3 brochazos   tamaño 2 — 7 brochazos   tamaño 3 — 11 brochazos

¿Cuántos brochazos hay en un pinino de tamaño 20?
Explica cómo llegaste a la respuesta.
¿Cuántos brochazos hay en un pinino de tamaño 100?
¿Cuántos brochazos hay en un pinino de tamaño n?

Aplica el modelo PER (Propósito, Estrategia, Resultado) con respecto al aprendizaje que lograste en esta actividad.

BIBLIOGRAFÍA.

Algebra con aplicaciones
Phillips, Elizabeth P. y Butts, Thomas y Shaughnessy, Michael
Editorial OXFORD
Edición 2005

Álgebra, Libro del Estudiante
Academia Institucional de Matemáticas
Editorial IPN
1era Edición, 2005.

PÁGINAS WEB DE CONSULTA.

Aritmética y Álgebra
http://www.aulamatematica.com/BC1/01_Reales/Reales_index01.htm

Representación gráfica de los números.
http://recursostic.educacion.es/descartes/web/materiales_didacticos/Representacion_numeros_en_recta/index.htm

Representación gráfica de los números: Números enteros.
http://recursostic.educacion.es/descartes/web/materiales_didacticos/Representacion_en_la_recta/Numeros1.htm

Potencias y raíces.
http://recursostic.educacion.es/descartes/web/materiales_didacticos/Potencias_y_raices/index.htm

LA FRACCIÓN Y SUS DIFERENTES FORMAS DE REPRESENTACIÓN
http://recursostic.educacion.es/descartes/web/materiales_didacticos/Fracciones_representacion/fracciones_intro.htm

UNIDAD II. EXPRESIONES ALGEBRAICAS.

COMPETENCIA PARTICULAR DE LA UNIDAD:
Utiliza conceptos, propiedades y relaciones algebraicas en la solución de ejercicios de su entorno académico.

RAP 1
Reconoce expresiones algebraicas, sus elementos y propiedades en operaciones con polinomios en su ámbito académico.

Ejemplo
Adición y sustracción de polinomios

(a) Determinar en la suma $(x^3+2x^2-5x+7)+(4x^3-5x^2+3)$

(b) Determinar la resta o diferencia en $(x^3+2x^2-5x+7)-(4x^3-5x^2+3)$

SOLUCIÓN

(a) Para obtener la suma de 2 polinomios cualesquiera en x, se suman los coeficientes de potencias iguales de x.

$(x^3+2x^2-5x+7)+(4x^3-5x^2+3)$

$=(1+4)x^3+(2-5)x^2-5x+(7+3)$ Se suman los coeficientes de potencias iguales de x

$=5x^3-3x^2-5x+10$ Se simplifica

Se indico el agrupamiento el primer paso para que estuviera todo completo. El lector puede omitir ese caso cuando se tenga dominio sobre las operaciones.

(b) Cuando se restan polinomios, primero se eliminan los paréntesis, tomando en cuenta que el signo menos procede a la segunda expresión entre paréntesis, cambia el signo de cada término de ese polinomio.

$(x^3+2x^2-5x+7)-(4x^3-5x^2+3)$

$=x^3+2x^2-5x+7-4x^3-5x^2+3$ Se eliminan los paréntesis

$=(1-4)x^3+(2+5)x^2-5x+(7-3)$ Se suman los coeficientes de las potencias iguales de x

$=3x^3+7x^2-5x+4$ Se simplifica

EJEMPLO
Multiplicación de binomios
Determinar el producto $(4x+5)(3x-2)$

SOLUCIÓN

Ya que 3x-2=3x+ (-2):
(4x+5)(3x-2)

$=(4x)(3x)+(4x)(-2)+(5)(3x)+(5)(-2)$ Propiedades distributivas

$=12x^2-8x+15-10$ Se multiplica

$=12x^2-7x-10$ Se simplifica

Con suficiente práctica en la resolución del problema del tipo del ejemplo II el lector podrá llevar a cabo los 2 primeros pasos en forma mental, y llegar directamente a la expresión final.

El ejemplo que sigue se presenta distintos métodos para terminar el producto de 2 polinomios.

EJEMPLO
Multiplicación de polinomios
Determinar el producto $(x^2+5x-4)\,(2x^3+3x-1)$

SOLUCIÓN

<u>Método 1</u>

Se comienza con una propiedad distributiva, considerando el polinomio $(2x^3+3x-1)$ como un número real único:

$(x^2+5x-4)(2x^3+3x-1)$

$=x^2(2x^3+3x-1)+5x(2x^3+3x-1)-4(2x^3+3x-1)$

A continuación se usa 3 veces otra propiedad distributiva y se simplifica el resultado obtenido.

$$(x^2+5x-4)(2x^3+3x-1)$$
$$=2x^5+3x^3-x^2+10x^4+15x^2-5x-8x^3-12x+4$$
$$=2x^5+10x^4-5x^3+14x^2+17x+4$$

Nótese que los 3 binomios del primero polinomio fueron multiplicados por cada uno de los 3 monomios del segundo polinomio, que da un total de 9 términos.

<u>Método 2</u>

Se colocan verticalmente los polinomios y se multiplican; se deja espacio para las potencias de x que tengan coeficiente 0 como el siguiente.

$$\begin{array}{cccccc|l}
 & & 2x^3 & +3x & -1 & & \\
 & & x^2 & +5x & -4 & & \\
\hline
2x^5 & & +3x^3 & -x^2 & & & =x^2(2x^3+3x-1) \\
 & +10x^4 & & +15x^2 & -5x & & =5x(2x^3+3x-1) \\
 & & -8x^3 & & -12x & +4 & =-4(2x^3+3x-1) \\
\hline
2x^5 & +10x^4 & -5x^3 & +14x^2 & -17x & +4 & \text{=suma de los de arriba}
\end{array}$$

RAP 2
Identifica productos notables y la factorización de expresiones algebraicas en un ambiente matemático.

EJEMPLO

División de polinomios entre un monomio
Expresar como polinomios “x” y “y”

$$\frac{6x^2y^3+4x^3y^2-10xy}{2xy}$$

Solución:

$$\frac{6x^2y^3+4x^3y^2-10xy}{2xy}=\frac{6x^2y^3}{2xy}+\frac{4x^3y^2}{2xy}-\frac{10xy}{2xy} \qquad \text{Se divide cada termino entre 2xy}$$

$$=3xy^2+2x^2y-5 \qquad \text{Se simplifica}$$

FÓRMULA DE PRODUCTOS	EJEMPLO
1) $(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$	$(2a+3)(2a-3) = (2a)^2 - 3^2 = 4a^2 - 9$
2) $(x \pm y)^2 = x^2 \pm 2xy + y^2$	$(2a-3)^2 = (2a)^2 - 2(2a)(3) + (3)^2$ $= 4a^2 - 12a + 9$
3) $(x \pm y)^3 = x^3 \pm 3x^2y + 3xy^2 \pm y^3$	$(2a+3)^3 = (2a)^3 + 3(2a9^2(3) + 3(2a)(3)^2 + (3)^3$ $= 8a^3 + 36a^2 + 54a + 27$

FÓRMULA DE FACTORIZACIÓN	EJEMPLO
1) Diferencia de cuadrados	$9a^2 - 16 = (3a)^2 - (4)^2 = 83a + 4)(3a - 4)$
2) Diferencia de cubos	$8a^3 - 27 = (2a)^3 - (3)^3$ $= (2a-3)[(2a)^2 + (2a)(3) + (3)^2]$
3) Suma de cubos	$125a^3 + 1 = (5a)^3 + (1)^3$ $= (5a+1)[-(5a)^2 - (5a)(1) + (1)^2]$ $= (5a+1)(25a^2 - 5a + 1)$

Ejemplos

Cancelación de factores comunes

$$\frac{3x^2 - 5x - 2}{x^2 - 4} = \frac{(3x+1)\cancel{(x-2)}}{(x+2)\cancel{(x-2)}}$$

Ejemplo

Productos y cocientes de expresiones racionales

a) $\dfrac{x^2 - 6x + 9}{x^2 - 1} \bullet \dfrac{2x - 2}{x - 3}$ b) $\dfrac{x+2}{2x-3} \div \dfrac{x^2 - 4}{2x^2 - 3x}$

Solución

a) $\dfrac{x^2 - 6x + 9}{x^2 - 1} \bullet \dfrac{2x - 2}{x - 3} = \dfrac{(x^2 - 6x - 9)(2x - 2)}{(x-1)(x-3)}$ propiedad de los cocientes

$$= \frac{(x-3)^{\frac{1}{2}} \bullet 2\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x+1)}(x-1)\cancel{(x-3)}}$$ Se factorizan todos los polinomios

Si x $\neq 3, x \neq 1$

$\downarrow$

$= \dfrac{2(x-3)}{x+1}$ se simplifican factores comunes

b) $\dfrac{x+2}{2x-3} \div \dfrac{x^2-4}{2x^2-3x} = \dfrac{x+2}{2x-3} \bullet \dfrac{2x^2-3x}{x^2-4}$ propiedad de los cocientes

$$= \frac{\cancel{(x+2)}x\cancel{(2x-3)}}{\cancel{(2x-3)}\cancel{(x+2)}(x-2)}$$

Propiedad de los cocientes factorización todos los polinomios.

Ejemplo

Simplificación de sumas de expresiones racionales
Efectuar las operaciones y simplificar

$$\frac{2x+5}{x^2+6x+9} + \frac{x}{x^2-9} + \frac{1}{x-3}$$

Solución

Se comienza factorizando los denominadores:

$$\frac{2x+5}{x^2+6x+9} + \frac{x}{x^2-9} + \frac{1}{x-3} = \frac{2´+5}{(x+3)^2} + \frac{x}{(x+3)(x-3)} + \frac{1}{x-3}$$

Como el MCD $(x+3)^2(x-3)$ se multiplican por $x-3$ numerador y denominador del primer cociente, los del segundo, por $x+3$, y el tercero, por $(x-3)^2$; después se suma;

$$\frac{(2x+5)(x-3)}{(x+3)^2(x-3)} + \frac{x(x+3)}{(x+3)^2(x-3)} + \frac{x+3^2}{(x+3)^2(x-3)}$$

$$= \frac{(2x^2-x-15)+(x^2+3x)+(x^2+6x+9}{(x+3)^2(x-3)}$$

Ejemplo

SIMPLIFICACIÓN DE FRACCIONES COMPLEJAS

$$\frac{1-\frac{2}{x-1}}{x-\frac{1}{x}}$$

Solución: se convierte en numerador y denominador de la expresión dada a cocientes sencillos y, a continuación se usa la regla para dividir cocientes.

$$\frac{1-\frac{2}{x-1}}{x-\frac{1}{x}} = \frac{\frac{(x+1)-2}{x+1}}{\frac{x^2-1}{x}}$$ Se combinan expresiones en numerador y denominador

$$= \frac{\frac{x-1}{x+1}}{\frac{x^2-1}{x}}$$ se simplifica

$$= \frac{x-1}{x+1} \bullet \frac{x}{x^2-1}$$ propiedad de los cocientes

$$= \frac{x\cancel{(x-1)}}{(x+1)\cancel{(x+1)}(x-1)}$$ propiedad de los cocientes se factoriza, $(x-1)^2$

Si $x \neq 1$

$$= \frac{x}{(x+1)^2}$$ Se cancela $(x-1)$

Otra forma es multiplicar a x(x+1) numerador y denominador de la expresión dada que es el MCD de 2/(x+1) y 1/x, y luego se simplifica el resultado.

Ejemplo

Racionalización de un denominador

Racionalizar el denominador de $\frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}$

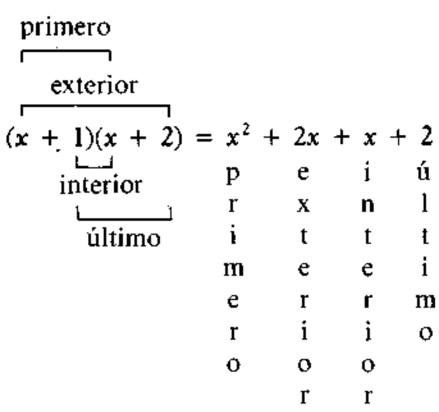
Solución:

$$\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} = \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} \bullet \frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$$ Se multiplican el numerador y el denominador por el conjugado de $(\sqrt{x})^2 - (\sqrt{y})^2$

$$= \frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{(\sqrt{x})^2 - (\sqrt{y})^2}$$ Propiedad de los cocientes y diferencia de cuadrados

$$= \frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{x-y}$$ Ley de los radicales

Nótese el modelo al multiplicar dos binomios y observando del segundo al último pasó en cada solución. Por ejemplo, en el ejemplo 1a. el segundo al último paso es el siguiente:



Aplicando la propiedad distributiva dos veces a (x + 1) (x + 2) da cuatro términos, siendo cada uno el producto de dos términos, un término de cada binomio. En el ejemplo 1b tenemos.

primero

exterior

$$(x+1)(x-2) = x^2 - 2x + x - 2$$

interior

último

En el ejemplo 1c tenemos.

primero

exterior

$$(2x+1)(x+3) = \underset{\text{primero}}{2x^2} + \underset{\text{exterior}}{6x} + \underset{\text{interior}}{x} + \underset{\text{último}}{3} = 2x^2 + 7x + 3$$

interior

último

Primero por primero	o sea $2x^2$	Primer producto
Primero por último	o sea 6x	Producto exterior
Último por primero	o sea x	Producto interior
Último por último	o sea 3	Último producto

De este modo

$$(2x - 1)(x - 3) = 2x^2 - 6x - x + 3 = 2x^2 - 7x + 3$$

Si abreviamos "primero" por P, "exterior" por E, "interior" por I y "último" por U, entonces podemos llamar a esto método PEIU.

REGLA DE PRODUCTO ESPECIALES.

Elevar binomio al cuadrado:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Multiplicar la suma y la diferencia de dos números:

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

Para simplificar una fracción cuyo numerador y denominador son polinomios,

1.- Simplifique el numerador y el denominador tanto como sea posible.
2.- Factorice el numerador y el denominador.
3.- Aplique la propiedad fundamental de las fracciones.

Ejemplo

Simplificar cada una de las siguientes fracciones tanto como sea posible.

a) $\dfrac{6x^2y - 3xy}{3xy}$

b) $\dfrac{3x^3 - x(x-1)}{x^2}$

c) $\dfrac{x^{10} - x^{60}}{x^{10}}$

d) $\dfrac{4x^2 + 3}{4x^2}$

Soluciones

a.-

$\dfrac{6x^2y - 3xy}{3xy} = \dfrac{3xy\,(2x - 1)}{3xy}$ Factoriza el numerador.

$= 2x-1$ Propiedad fundamental de las fracciones.

b.-

$\dfrac{3x^3 — x(x — 1)}{x^2} = 3x^3 — x^2 + x$ Simplifíquese el numerador.

$\dfrac{x(3x^2 - x + 1)}{(x)(x)}$ Factorízar el numerador y el denominador.

$\dfrac{3x^2 - x+1}{x}$ Propiedad fundamental de las fracciones.

c.-

$\dfrac{x^{10} - x^{60}}{x^2} = \dfrac{x^{10}\,(1- x^{50})}{x^2}$

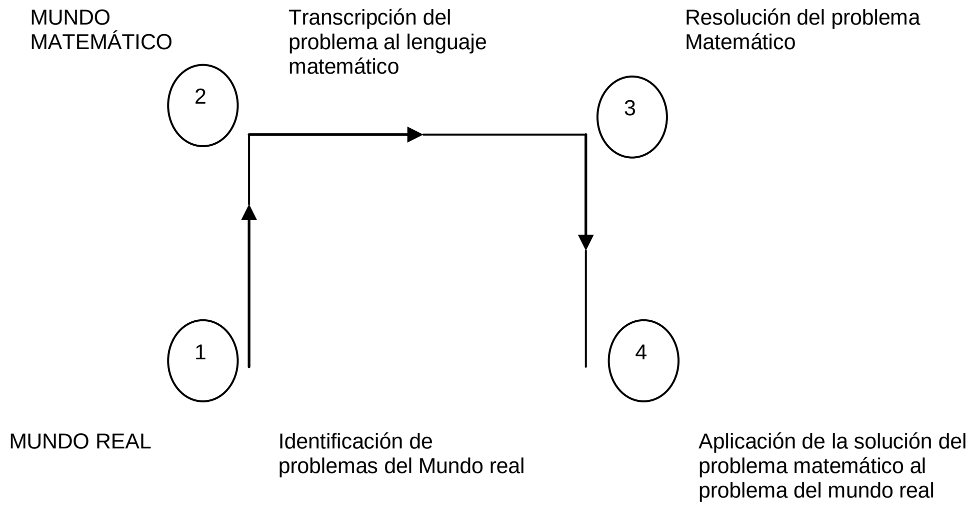
$= 1 - x^{50}$

d.-

$\dfrac{4x^2 + 3}{4x^2}$ Esto no se simplifica; el numerador no puede factorizarse.

RAP 3
Utiliza los productos notables y la factorización en operaciones con fracciones algebraica en su ámbito académico.

ÁLGEBRA COMO UN LENGUAJE COMÚN



Ejemplo 1

FRASE EN ESPAÑOL	FRASE MATEMÁTICA
La suma de un número n y 5	n + 5
Un número n 7 más	n + 7
Un número p 3 menos	p - 3
Un número x aumentado en 15	x + 15
Un número x reducido en 15	x - 15
La diferencia entre dos números x y y	x - y o bien y- x

Ejemplo 2

FRASE EN ESPAÑOL	FRASE MATEMÁTICA
Dos veces un número n	2n
La suma de 3 veces un número más cinco	3x + 5
El producto de dos números x y y	xy
Un número n dividido entre 2	$\frac{n}{2}$
La razón de dos números x y y	$\frac{x}{y}$
Kilómetros por hora	$\frac{km}{h}$
10% de un número	0.10n

Ejemplo

Escribir una expresión para las siguientes frases.

a) La suma de dos números, donde el segundo numero sea cuatro más seis veces el primer número.
b) La distancia recorrida durante un viaje de ocho horas si viajo a una velocidad promedio de r millas por hora durante las primeras seis horas en carretera y a una velocidad promedio de 30 millas por hora menos que la velocidad promedio anterior durante las dos últimas horas en la ciudad.

c) La cantidad de dinero en una bolsa con 1000 monedas de 10 y 25 centavos
d) El costo de alquilar un automóvil durante un día, cuando se cobra $21.95 por día más 17 centavos por milla

SOLUCIONES

a)

Sea x el primer número. El segundo número es:

$$\overbrace{4}^{\text{cuatro}} \quad \overbrace{+}^{\text{mas}} \quad \overbrace{6x}^{\text{seis veces el primero}}$$

La suma de los 2 números es:

$$\overbrace{x}^{\text{primer numero}} \quad \overbrace{+}^{\text{sumado al}} \quad \overbrace{4+(6x)}^{\text{segundo numero}}$$

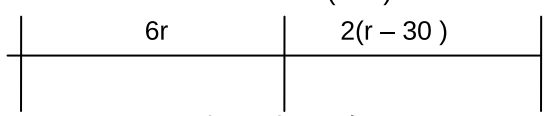
Esta suma puede simplificarse:

$x+4+6x=4+7x$

b)

Sabemos que la distancia = velocidad por tiempo. Para analizar este problema, podríamos hacer un esquema para ordenar la información (datos).

Tiempo = 6 horas tiempo = 2 horas
Velocidad = r velocidad = r – 30
Distancia = 6r distancia = 2(r-30)



Distancia total
$6r+2(r-30)$

Distancia total= $6r$ $2(r-30)$

Distancia recorrida Durante las primeras 6 horas a una Velocidad r	distancia recorrida durante las ultimas 2 horas a una velocidad de 30 millas por hora menos que r. La propiedad distributiva
=6r+2r-60	
=8r-60	expresión para la distancia Simplificada.

c)

Si d es el número de monedas de a 10 centavos, entonces 1000-d debe ser el número de monedas de a 25 centavos, ya que hay un total de 1000 monedas.

Cantidad de monedas de 10 centavos = 10 (d) centavos
Cantidad de monedas de 25 centavos =25(1000-d) centavos
Dinero total de las 1000 monedas = (10 (d) centavos + 25(1000)-25d) centavos
= (10D+25(1000)-25 CENTAVOS
= (25000)-15d

Dinero expresado en dólares $= \dfrac{25000-15d}{100}$ dolares
= (250-0.15d) dólares

d)

Sea m el número de millas recorridas en un día. El costo de alquilar un automóvil es 21.95+0.17m

Ejemplo

La tabla representa el costo de alquiler de un automóvil durante un día. ¿Cuánto costará alquilar el automóvil por un día?

a) ¿Si estimamos nuestro recorrido En 400 millas diarias?

b) ¿'Si estimamos nuestro recorrido en 250 millas diarias?
c) ¿Si estimamos nuestro recorrido en 320 millas diarias?

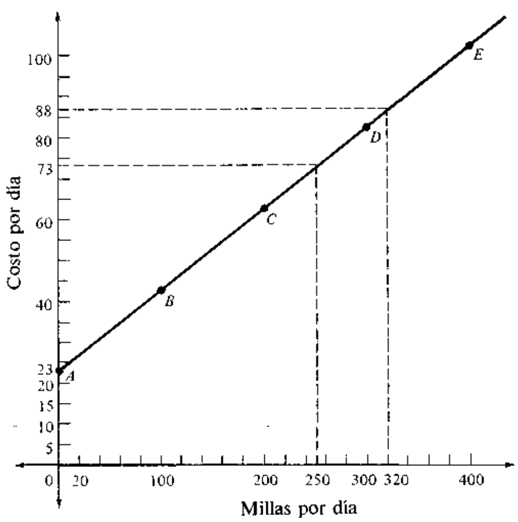
MILLAS RECORRIDAS EN UN DÍA	COSTO
0	$23
100	$43
200	$63
300	$83
400	$103
500	$123

SOLUCIONES

MÉTODO 1: TABLA

A partir de la tabla 3.1 es fácil leer el costo. Localizamos 400 millas en la primera columna y luego localizamos el correspondiente costo en la segunda columna. El costo es $103.

Si quisiéramos recorrer 250 millas en un día, entonces a partir de la tabla estimaríamos el costo está entre $63 y $8. Como 250 millas esta en medio de 200 y 300 millas, es razonable suponer que el costo estará a la mitad
Si quisiéramos viajar 320 millas, no sería fácil estimar el costo a partir de la tabla. Todo lo que sabemos es que estaría a partir de $83 y $103 y más cercano a $83



MÉTODO 2: GRÁFICA

Una forma más conveniente de representar la Tabla es mediante la siguiente gráfica. Para hacer una gráfica, utilizamos dos rectas numéricas perpendiculares que se llaman ejes. Los números sobre el eje horizontal representan el número de millas recorridas por día. Los números sobre el eje vertical representan el costo total por día en dólares. Los puntos {A, B, C, D, E) representan cinco registros de la tabla. Por ejemplo, el punto A representa que cuesta $23 antes de acumular cualquier número de millas. El punto B denota que cuesta $43 viajar 100 millas. La localización de los puntos es aproximada. Nótese que los puntos aparecen sobre una recta que ha sido trazada.

El costo de recorrer 400 millas es $103, que es el punto E sobre la gráfica.

Para hallar el costo de viajar 250 millas, localizamos 250 sobre el eje horizontal y luego se asciende verticalmente (perpendicular) hacia arriba hasta que corte a la recta. Después se sigue en dirección horizontal (perpendicular) hacia la izquierda, hasta que corte el eje vertical. Estimamos que este punto representa un costo de $73.

c. Análogamente, a partir de la gráfica, se estima que el costo por $320 millas es $88.

MÉTODO 3: ECUACIÓN

Otra forma de analizar esta información es mediante la siguiente ecuación:
$C = 23 + 0.2M$
Donde C es el costo de recorrer M millas en un día. La ecuación se obtiene notando que cuesta $23 alquilar un automóvil más $20 por cada 100 millas recorridas o sea 20 centavos por milla.

a. Sustituyendo M por 400 tenemos
$$C = 23 + 0.2(400) = 103$$
b. Sustituyendo M por 250 tenemos
$$C = 23 + 0.2(250) = 73$$
c. Sustituyendo M por 320 tenemos
$$C = 23 + 0.2(320) = 87$$

Nótese que con la ecuación obtenemos un costo exacto, mientras que con la gráfica o la tabla obtenemos un costo aproximado

Una ecuación lineal en una variable es una ecuación en la cual cada vez que aparece la variable, está elevada a la primera potencia y la variable no aparece en el denominador.

El proceso de hallar valores de la variable que resulten en una proposición verdadera se llama resolución de la ecuación. Estos valores se llaman soluciones o raíces de la ecuación.

PRINCIPIOS DE IGUALDAD

1.- Sumar o restar la misma cantidad en ambos miembros de la ecuación no cambia su solución.
2.- Multiplicar o dividir ambos miembros de una ecuación por la misma cantidad diferente de cero no cambia su solución.

Ejemplo

a) ¿Cuánto tiempo le tomaría recorrer 300 millas si maneja a una velocidad promedio de 55 millas por hora?
b) La compañía manufacturera Zardos fabrica sacapuntas. Supongamos que cuesta $4 hacer un sacapuntas que se vende a $6. ¿Cuántos sacapuntas deben fabricarse y venderse para tener una ganancia de $10000?

Soluciones
Aunque el del álgebra no es necesario para resolver estos problemas, lo haremos de cualquier manera, ya que son versiones simples de problemas más complicados para los cuales los métodos algebraicos no son necesarios.

a)
Distancia = velocidad x tiempo, o sea d = rt. Como d = 300 y r = 55, tenemos
$55t = 300$
$t = \frac{300}{55} =$ 5.45 horas o alrededor de 5 horas y 27 minutos

b)
Ganancia = ingreso – costo. Si x es el número de sacapuntas vendidos, entonces el ingreso es igual a 6x y el costo igual a 4 x:

$6x - 4x = 10000$

$2x = 10000$

$x = 5000$ sacapuntas

Ejemplo
El precio de la hamburguesa aumento 10% este mes. Ahora cuesta $1.79 la libra.

a) ¿Cuánto costaba la libra el mes anterior?
b) Si el precio aumento 8% el mes anterior, ¿Cuánto costaba la libra hace dos meses?

Soluciones

a)

Si P era el precio el mes anterior, entonces

P	+	0.10P	=	(1+0.10)P = 1.1P =	1.79
Precio mes Anterior		10& de aumento			precio actual

Ya que 1.1P = 1.79, P = $\frac{1.79}{1.1} = 1.6273$

El costo del mes anterior era aproximadamente $1.63 la libra.

b)

Si P era el precio de hace 2 meses, entonces con dos aumentos tenemos.

(1.08)(1.1)P = 1.79
1.188P = 1.79
P = $1.51 la libra

Ejemplo
Despejar x

a) 3x + 2 = 119 b. 0.13x – 0.02 = 27

Soluciones

a)

3x +2 = 119
3x= 117 Réstese 2.
x= $\frac{117}{3}$ Divídase entre 3.
x=39

Comprobación

3(39) + 2 = 119
117 + 2 =119
119=119

b)

0.13x – 0.02 = 27
0.13x = 27.02
$x = \frac{27.02}{0.13}$
x = 207.85

0.13 (207.85) – 0.02 = 27 sustitúyase x por 207.85.
27.0205 – 0.02= 27
27.0005 = 27 comprobado.

Ejemplo

Determinar si 315 puede expresarse como la suma de.

a) Tres
b) Cuatro, o

c) Cinco
d) Enteros o consecutivos.

Soluciones
Sea x el primer entero. Entonces los siguientes cuatro enteros consecutivos son x + 1, x + 2, x + 3, x + 4.
Para verificar si 315 puede expresarse como la suma de tres enteros consecutivos, debemos despejar x de la siguiente ecuación:

a)
315 = x + (x + 1) + (x + 2)
315 = 3x + 3
315 = 3x
104 = x

Por tanto 315 = 104 + 105 + 106

b)
Para cuatro enteros consecutivos tenemos

315 = x + (x + 1) + (x + 2) + (x + 3)
315 = 4x + 6
309 = 4x
77.25 = x

Como x no es un entero, 315 no puede expresarse como la suma de cuatro enteros consecutivos.
Para cinco enteros consecutivos tenemos

c)
315 = x + (x + 1) + (x + 2) + (x + 3) + (x + 4)
315 = 5x + 10
305 = 5x
61 = x
Entonces: 315 = 61 + 62 + 63 + 64 + 65.

RAZONES Y PROPORCIONES

Dos razones a/b y c/d son proporcionales si:
$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, donde b $\neq$ 0, d $\neq$ 0

Ejemplo
4 latas de jugo de naranja cuestan $2.09. ¿Cuánto debemos pagar por 10 latas?

SOLUCIÓN
x es el número de dólares que pagamos por 10 latas.

$\frac{2.09}{4} = \frac{X}{10}$ Se espera que las dos razones sean proporcionales

$\frac{20.9}{4} = X$ Multiplíquense ambos lados por 10.

$5.23 = X
Por lo tanto esperaríamos pagar $5.23 por 10 latas de jugo de naranja si la razón para 10 fuese la misma que la de 4.

Ejemplo

Su automóvil rinde 28 millas por galón. ¿Qué tan lejos puede viajar con 12 galones? ¿Puede ir de Los Ángeles a San Francisco (403 millas) con un solo tanque de gasolina?

SOLUCIÓN
Y es el número de millas por 12 galones.

$\frac{28}{1} = \frac{Y}{12}$ Dos razones iguales.

28(12) = Y Multiplíquense ambos miembros por 12.

Y = 336 millas. Como hay 403 millas de Los Ángeles a San Francisco, la respuesta es no.

Ejemplo
Se requieren 9 acres para dar de pastar a 2 vacas. ¿Cuántos acres se necesitan para dar de pastar a 2000 vacas?

SOLUCIÓN
Z es el número de acres para 2000 vacas.

$\frac{2}{9} = \frac{2000}{Z}$ Dos razones iguales. Nótese que esto no es todavía una ecuación lineal

2Z = 18000 Multiplíquense ambos miembros por 9Z, Z = 0.

Z = 9000 Ahora ya tenemos una ecuación lineal.

Divídanse ambos miembros entre 2.

Por lo tanto se necesitan 9000 acres. (Si un acre se vende a $500, es necesario bastante dinero para alimentar ese ganado.)

EJEMPLO
Resolver las siguientes proporciones:

a) $\frac{3}{x} = \frac{28}{17}$ $x \neq 0$

b) $\frac{3\,{}^{1}\!/_{3}}{1\,{}^{1}\!/_{8}} = \frac{5\,{}^{1}\!/_{2}}{x}$ $x \neq 0$

c) $\frac{y}{0.072} = \frac{1.03x10^{5}}{3.09x10^{-2}}$

Soluciones:

a)

$$\frac{3}{x} = \frac{28}{17}$$

51=28x multiplíquense por 17x,$x \neq 0$

$$x = \frac{51}{28} \approx 1.82$$

b)

$$\frac{3\,{}^{1}\!/_{3}}{1\,{}^{1}\!/_{8}} = \frac{5\,{}^{1}\!/_{2}}{x} =$$

$$\frac{\frac{10}{3}}{\frac{15}{8}} = \frac{\frac{11}{2}}{x}$$

$\frac{10}{3}x = \frac{15}{8} * \frac{11}{2}$ Multiplíquese por $\frac{15}{8}X, X \neq 0$

$$\frac{10}{3}x = \frac{165}{16} =$$

$\frac{3}{10} * \frac{10}{3}x = \frac{3}{10} * \frac{165}{16}$ Multipliques por $\frac{3}{10}$

$x = \frac{495}{160} \approx 3.09$

c)

$$\frac{y}{0.072} = \frac{1.03x10^{5}}{3.09x10^{-2}}$$

$(3.09x10^{-2})Y = (0.072)(1.03x10^{-5})$

$(3.09x10^{-2})Y = (7.2x10^{-2})(1.03x10^{-5})$ Conviértase 0.072 a notación científica

$Y = \frac{(7.2x10^{-2})(1.03x10^{-5})}{3.09x10^{-2}}$ Divídase ambos lados entre $3.09x10^{-2}$

$Y = \frac{(7.2)(1.03)}{3.09} * \frac{10^{-2} * 10^{5}}{10^{-2}}$

$Y=2.40\ x10^{5}$

ECUACIONES LINEALES

Sumar o restar la misma cantidad en ambos miembros de una ecuación no cambia su solución
Multiplicar o dividir por una misma cantidad diferente de cero en ambos miembros de una ecuación no cambia por su solución.

Ejemplo
Despejar x.

a) $3x + 2 = 2x - 4$
b) $32x + 14 = 42x - 57$
c) $m_1x + b_1 = m_2x + b_2, m_1 \neq m_2$

Soluciones
a)

3x+2=2x+4
3x=2x-6 Réstese 2 en ambos miembros
X= - 6 Réstese 2x en ambos miembros

b)

32x+14=42x-57
32x=42x-71 Réstese 14 en ambos miembros
-10x= - 71 Réstese 42x en ambos miembros
$x = \frac{-71}{-10} = \frac{71}{10} = 7.1$ Divídanse ambos miembros entre 10

c)

$m_1x + b_1 = m_2x + b_2$ $m_1 \neq m_2$
$m_1x = m_2x + b_2 - b_1$ Réstese b_1 en ambos miembros
$m_1x - m_2x = b_2 - b_1$ Réstese m_2x en ambos miembros
$(m_1 - m_{2)}x = b_2 - b_1$ Propiedad distributiva
$x = \frac{b_2 - b_1}{m_1 - m_2}$
Divídanse ambos miembros entre $m_1 - m_2$, que es la cantidad diferente de cero ya que $m_1 \neq m_2$

Ejemplo
Despejar x.

a) $\frac{2}{3}x - \frac{3}{4} = 2x + \frac{1}{2}$.

b) $\frac{x}{a} - \frac{x}{b} = a - b,$ donde $a,\ b \neq 0, a \neq 0$

Soluciones.

a)

Para evitar cálculos que incluyen fracciones, multiplicamos ambos miembros por un común denominador $\left(\frac{2}{3}\right);\left(\frac{3}{4}\right);\left(\frac{1}{2}\right)$

$$\frac{2}{3}x - \frac{3}{4} = 2x + \frac{1}{2}$$

Multiplíquense ambos miembros por 12, el mínimo denominador de 2/3 ,3/4,1/2.

$$12\left(\frac{2}{3}x - \frac{3}{4}\right) = 12\left(2x + \frac{1}{2}\right)$$

$$12\left(\frac{2}{3}x\right) - 12\left(\frac{3}{4}\right) = 12(2x) + 12\left(\frac{1}{2}\right)$$ Propiedad distributiva

8x-9=24x+6

-15=16x

$$\frac{-15}{16} = x$$

b)

$$\frac{x}{a} - \frac{x}{b} = a - b$$ Un común denominador es ab

$$ab\left(\frac{x}{a}\right) - ab\left(\frac{x}{b}\right) = ab(a-b)$$ Propiedad distributiva

$$bx - ax = ab(a-b)$$

$$(b-a)x = ab(a-b)$$ Propiedad distributiva

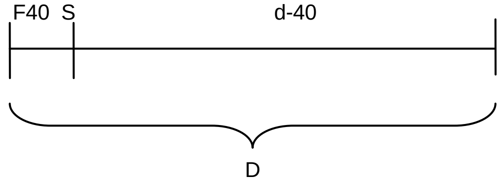
$$x = \frac{ab(a-b)}{(b-a)} = -ab$$

Divídanse ambos miembros entre b-a.

Recuérdese, $\frac{a-b}{b-a} = -1$

Ejemplo
Alfredo el veloz puede correr a la velocidad de 5 metros por segundo, mientras que Samuel el lento solamente 3 por segundo. Ellos desean competir entre sí, pero para que sea justa, Samuel obtiene una ventaja de 40 metros a la salida. Cuál es la carrera más larga en que Samuel pueda ganar?

Solución.
Supongamos d denota la longitud de la carrera. Dibujar un esquema puede ayudar visualizar las relaciones.



Determine la longitud de la carrera de distancia. Samuel carrera una distancia ´´un poco´´ menor. En una carrera de distancia ambos competidores corren durante la misma cantidad de tiempo.

Tiempo de Alfredo $= \frac{d}{5}$ Tiempo $= \frac{\text{distancia}}{\text{velocidad}}$

Tiempo de Samuel $= \frac{d-40}{3}$

$\frac{d}{5} = \frac{d-40}{3}$ Los tiempos son iguales. Se despeja d

3d=5d-200 Multiplíquese por 15
200=2d
100=d

Por lo tanto si Samuel elige cualquier distancia más corta que 100 metros ganara.

PROCEDIMIENTO PARA RESOLVER PROBLEMAS

El paso esencial para resolver un problema aplicado consiste en la habilidad de hacer cualquiera de las dos siguientes cosas para formar la ecuación:

1. Hallar dos cantidades iguales, o bien
2. Hallar dos formas equivalentes de expresar la misma cantidad.

Ejemplo
Despejar x en cada una de las siguientes ecuaciones.
4 – 2(x - 3) = x – 5(x + 1)
3 – 2{x - 2(x – 1)} = 4 + 3x – 2{7 – (1 – x)}

Soluciones
4 – 2(x - 3) = x – 5(x + 1)
4 – 2x + 6 = x – 5x – 5 propiedad distributiva.
10 – 2x = -4x – 5 agrúpense términos semejantes.
2x = - 15 4x y – 10 en ambos miembros de ecuación
dívídanse ambos miembros entre 2.

$x = -\frac{15}{2}$

Como las expresiones son más complicadas, es aconsejable comprobar la respuesta para estar seguros que no hemos cometido algún error. De hecho, es siempre aconsejable comprobar las respuestas.

Comprobación

$4-2(-\frac{15}{2}-3) = -\frac{15}{2}-5(-\frac{15}{2}+1)$ Sustitúyase $-\frac{15}{2}$ para x.

$4-2(-\frac{21}{2}) = -\frac{15}{2}-5(-\frac{13}{2})$

$4+21 = -\frac{15}{2}+\frac{65}{2}$

$25 = \frac{50}{2}$

25 = 25 comprobado.

Si usted puede resolver esta ecuación con todos sus paréntesis, probablemente resolverá cualquier ecuación lineal. Comience trabajando desde el interior.

3 – 2{x - 2(x – 1)} = 4 + 3x – 2{7 – (1 – x)} propiedad distributiva.
3 – 2{x - 2x + 2} = 4 + 3x – 2{7 – 1 + x} simplifíquese.

$3 - 2\{- x + 2\} = 4 + 3x - 2\{6 + x\}$ — propiedad distributiva

$3 + 2x - 4 = 4 + 3x - 12 - 2x$ — simplifíquese.

$2x - 1 = x - 8$ — se suman – x y 1 en ambos miembros.

$X = -7$

Comprobación

$3 - 2\{-7 - 2(-7 - 1)\} = 4 + 3(-7) - 2\{7 - (1 - (-7)\}$

$3 - 2\{-7 + 16\} = -17 - 2(-1)$

$3 - 2\{9\} = -17 + 2$

$-15 = -15$

Ejemplo

Despejar x.

a) $3(2x - 5) = 2(3x - 1) + x$

b) $3(2x - 5) = 2(3x - 1) + 7$

c) $3(2x - 5) = 2(3x - 1) - 13$

Soluciones

a.-

$3(2x - 5) = 2(3x - 1) + x$

$6x - 15 = 6x - 2 + x$

$6x - 15 = 7x - 2$

$-13 = x$

b.-

$3(2x - 5) = 2(3x - 1) + 7$

$6x - 15 = 6x - 2 + 7$

$6x - 15 = 6x + 5$

$-15 = 5$ ¡falso!

La proposición – 15 = 5 es obviamente falsa. Los dos principios básicos de las igualdades establecían que desarrollar la misma operación en ambos miembros de una ecuación no modifica su solución. Como – 15 = 5 es una ecuación que no tiene solución, la ecuación original no tiene solución. Esta ecuación se llama una contradicción o falsa.

c.-

$3(2x - 5) = 2(3x - 1) - 13$

$6x - 15 = 6x - 2 - 13$

$6x - 15 = 6x - 15$ ó $0 = 0$ ¡siempre cierto!

Esta vez, obtenemos la misma cantidad en ambos miembros de la ecuación. No importa que número real sustituyamos para x, la proposición 6x – 15 = 6x – 15 es verdadera. Por lo tanto, todo número real es una solución de la ecuación original. Tal ecuación se llama identidad.

Una ecuación se llama:

1. Una ecuación condicional si tiene solamente un numero finito de soluciones. (una ecuación lineal tiene una solución.)
2. Una identidad si tiene todos los números de un conjunto infinito especificado como soluciones.
3. Una contradicción o falsa si no tiene solución; implica una contradicción de algún hecho conocido.

Ejemplo

Regresemos a la compañía manufacturera Zardos que continua fabricando sacapuntas.
Recuerde que después de los costos iniciales de $10 000, cuesta $4 hacer un sacapuntas que se vende a $5.95. ¿Cuántos sacapuntas deben vender para obtener un ganancia de 10% (10% de sus costos)?

Solución

Como antes, sea x el número de sacapuntas. Como ganancia = ingreso – costo, tenemos

Ingreso = 5.95x

Costo = 10 000 + 4x
Ganancia = 0.1 (10 000 + 4x)

Consecuentemente,

$$5.95x – (10\ 000 + 4x) = 0.1 (10\ 000 + 4x)$$
$$5.95x – 10\ 000 - 4x = 1\ 000 + 0.4x$$
$$1.95x = 11\ 000 +0.4x$$
$$1.55x = 11\ 000$$

$x = \frac{11\ 000}{1.55}$ = 7 097 sacapuntas

Ejemplo

Una planta procesadora de alimentos pretende fabricar 900 galones de almíbar que contiene 50% de azúcar. Tiene en existencia almíbar que contiene 70% de azúcar. Otro que contiene 20% de azúcar y otro sin azúcar (agua).

Cuantos galones de almíbar al 70% y almíbar al 20% deberían ser utilizados para fabricar 900 galones de almíbar al 50%?

Cuantos galones de almíbar al 70% y de almíbar sin azúcar deben utilizarse para fabricar 900 galones de almíbar?

Soluciones:

Para hallar una ecuación notamos

Cantidad de azúcar en almíbar al 70%	+	Cantidad de azúcar en almíbar al 20%	+	Cantidad de azúcar en almíbar al 50%

Hemos expresado la cantidad de azúcar presente en 2 formas. Si x denota el número de galones de almíbar al 70% utilizado, entonces la cantidad de azúcar es 0.70x galones. Si se utilizan x galones de almíbar al 70& entonces, se utilizan (900-x) galones de almíbar al 20%; que contiene 0.20 (900-x) galones de azúcar. Los 900 galones de almíbar al 50% contendrán 450 galones de azúcar. De este modo:

Ingrediente 1	+	Ingrediente 2	=	Mezcla
(Porcentaje*cantidad)	+	(Porcentaje*cantidad)	=	(porcentaje*cantidad)
70%*x gal	+	20%(900-x) gal	=	50%*900gal

0.70x+0.20 (900-x)=0.50 (900)
0.70x+180-020x =450
0.50X+180 =450

$x = \frac{450}{0.7} \approx 642.86$

Por lo tanto, se utilizan 540 galones de almíbar al 70% y 360 galones de almíbar al 20%.

En este caso sea x igual al número de galones utilizados de almíbar al 70%. Esta vez no hay azúcar en el segundo almíbar, de tal forma que la ecuación se transforma en:

Ingrediente 1		Ingrediente 2		Mezcla
(Porcentaje*cantidad)	+	(Porcentaje*cantidad)	=	(porcentaje*cantidad)
70%x	+	0%(900-x)	=	50%(900)

0.7x+0(900-x)=0.5(900)
0.7x=450

$x = \frac{450}{0.7} \approx 642.86$

Así que utilizamos 642.86 galones de almíbar al 70% y 257.14 galones de almíbar sin azúcar. En almíbar sin azúcar disminuye el almíbar al 70%.

RESUMEN DE PROCEDIMIENTOS PARA RESOLVER PROBLEMAS

1. Lea el problema cuidadosamente
2. Dibuje un esquema (si es posible)
3. Construya una tabla o cuadro para resumir los datos (si es posible)
4. Imagine una respuesta y compruébela. El procedimiento de comprobación le servirá en los pasos 5 & 6
5. Elija una variable y exprese que cantidad representa la variable.
6. Halle una ecuación que contenga la variable: busque dos cantidades iguales o dos formas de expresar la misma cantidad.
7. Resuelva la ecuación
8. Compruebe su respuesta con el problema original

FACTOR COMÚN DE POLINOMIO

Es el polinomio que aparece en cada término de la expresión:

Ejemplo 1:

Factorizar la expresión:

$$x(a + b) + y(a + b) =$$

Observe que tiene un factor común que es (a + b):

$$x(\mathbf{a + b}) + y\mathbf{(a + b)} =$$
$$(x + y)\,(a + b)$$

Ejemplo 2:
Factoriza:

$$2a\,(m - 2n) - b\,(m - 2n) =$$
$$2a\,\mathbf{(m - 2n)} - b\,\mathbf{(m - 2n)} =$$
$$(2a - b)\,(m - 2n) =$$

FACTORIZACIÓN DE UN TRINOMIO DE LA FORMA $ax^2 + bx + c$

Para factorizar un trinomio de la forma $ax^2 + bx + c$, se realizamos el siguiente procedimiento:

1.- Se buscan dos números cuya suma sea el coeficiente de b:
$m + n = b$
2.- Esos mismo número, su producto debe de ser igual a (a)(c):
$(m)(n) = ac$
3.- Descomponemos el termino bx, en los número anteriormente encontrados, de la siguiente manera:
$ax^2 + mx + nx + c$
4.- Encontramos un factor común, para factorizar la ecuación.

Ejemplo:

Factorizar $2x^2 - 11x + 5$
$m + n = -11$
$m\,n = (2)(5) \quad \Rightarrow \quad mn = 10$
Estos dos números son $m = -10$ y $n = -1$

Entonces la factorización es:
$$2x^2 - 11x + 5 = 2x^2 - 10x - x + 5$$
$$= 2x(x - 5) - (x - 5) =$$
$$= (x - 5)(2x - 1)$$

FACTORIZACIÓN DE LA DIFERENCIAS DE CUBOS $a^3 - b^3$.

Para realizar una factorización de diferencias de cubos, se hace de la siguiente manera:

1. Calculamos la raíz cúbica de ambos términos.
2. Descomponemos la expresión algebraica, considerando sus raíces cúbicas, en dos productos, como se observa a continuación:

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

Ejemplo:

Factorizar $8 - x^3 =$

La raíz cúbica de x3 ➔ $\sqrt[3]{x^3} = x$

La raíz cúbica de 8 ➔ $\sqrt[3]{8} = 2$

La factorización queda:

$$8 - x^3 = (2 - x)\,(2^2 + 2x + x^2) = (2 - x)\,(4 + 2x + x^2)$$

FACTORIZACIÓN DE LA SUMA DE CUBOS $a^3 + b^3$.

Para realizar una factorización de la suma de cubos, se hace de la siguiente manera:

1. Calculamos la raíz cúbica de ambos términos.
2. Descomponemos la expresión algebraica, considerando sus raíces cúbicas, en dos productos, como se observa a continuación:

$$a^3 + b^3 = (a + b)\,(a^2 - ab + b^2)$$

Ejemplo:

Factorizar $27a^3 + 1 =$

La raíz cúbica de $27a^3$ ➔ $\sqrt[3]{27a^3} = 3a$

La raíz cúbica de 1 ➔ $\sqrt[3]{1} = 1$

La factorización queda:

$$27a^3 + 1 = (3a + 1)\,((3a)^2 + (3a)\,(1) + 1^2) = (3a + 1)\,(9a^2 - 3a + 1)$$

EJERCICIOS:

I. <u>OPERACIONES CON FRACCIONES ALGEBRAICAS</u>

Resuelve las siguientes operaciones con fracciones algebraicas, simplificando cuando corresponda:

Suma:

1) $\frac{x - 2}{4} + \frac{3x + 2}{4} =$

2) $\frac{2}{5a^2} + \frac{1}{3ab} =$

3) $\frac{a - 2b}{15a} + \frac{b - a}{20b} =$

4) $\frac{2a - 2}{3a} + \frac{3x + 2}{10x} + \frac{x - a}{5ax} =$

5) $\frac{1}{a + 1} + \frac{1}{a - 1} =$

6) $\frac{m + 3}{m - 3} + \frac{m + 2}{m - 2} =$

Resta:

7) $\frac{1}{x-4} - \frac{1}{x-3} =$

8) $\frac{m-n}{m+n} - \frac{m+n}{m-n} =$

9) $\frac{2a+3}{4a} \quad \frac{a-2}{8a} =$

Multiplicación:

10) $\frac{4a^2}{5b^3} \bullet \frac{6a}{8b} \bullet \frac{15b^2}{2a^4} =$

11) $\frac{5x+25}{14} \bullet \frac{7x+7}{10x+50} =$

12) $\frac{m+n}{mn-n^2} \bullet \frac{n^2}{m^2-n^2} =$

13) $\frac{1+x}{a+1} \bullet \frac{a^2+a}{x-x^2} \bullet \frac{x^2}{a} =$

División:

14) $\frac{x^2}{3y^2} \div \frac{2x}{y^3} =$

15) $\frac{3a^2b}{5x^2} \div a^2b^3 =$

16) $\frac{x-1}{3} \div \frac{2x-2}{6} =$

17) $\frac{x^3-x}{2x^2+6x} \div \frac{5x^2-5x}{2x+6} =$

18) $\frac{1}{1+\frac{1}{x}} =$

19) $\frac{1}{1-\frac{1}{1+\frac{1}{x}}} =$

20) $\frac{\frac{x+y}{x}}{\frac{x+y}{y}} =$

II. OPERACIONES CON POLINOMIOS

Reduce los siguientes términos semejantes:

1) $4m^3 - 7m^2 + 6m^3 - m + 1 - m^4 + m^3 - 5m^2 + 6m - 9 =$

2) $3x + 2y - z + 5x - 4y + z + 4x + 8y =$

3) $2a^2b + 3ab^3 - 8a^2b + 6ab^3 + 10\,a^2b + 16 - 5 =$

Resuelve las siguientes operaciones con monomios y polinomios:

4) $(x^2 + 18xy + 2y^2 - 6) + (10x^2 - xy - 8y^2 + 5) =$

5) $(4x + 5x^2 - 3) + (8x + 2 - 3x^2) + (8x^2 - 6x + 3) =$

6) $(2a^2 - 3a^4 - 2a) - (a^4 - 10a^2 + 16) =$

7) $(7x^2 - 8 + 10x^3 - 3x) - (2x^3 - 7 + 4x - 5x^2) =$

8) $(x^2 - 3xy + y^2)(2x - 3y + 2) =$

9) $3x(4x - 8) =$

10) $(x + 5a)(x - 4a) =$

11) $\dfrac{-80a^6 - 16a^4 + 64a^2 - 32a}{-8a} =$

12) $\dfrac{2x^5 + 3x^4 + x^3 + 4x^2 + x + 3}{x^3 + 2x^2 - 1} =$

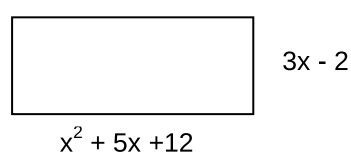
13) $\dfrac{x^3 + 4x^2 - 25x + 12}{x - 3} =$

14) $\dfrac{6a^3 - 10a^2 - 10a - 2}{3a + 1} =$

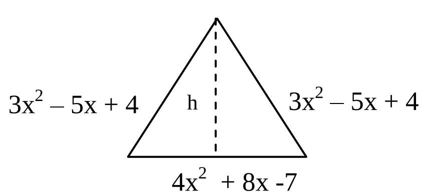
15) $\dfrac{12p^3 - 25 - 20p + 17p^2}{3p + 5} =$

En cada caso, determina el perímetro y área de las siguientes figuras:

16)

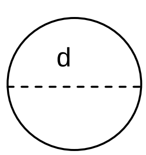


17)



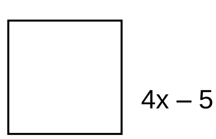
$h = 3x^2 - 5x$

18)



$d = 2x^2 - 8x + 6$

19)



III. PRODUCTOS NOTABLES

Resuelve los siguientes productos notables:

1) $(c + d)^2 =$
2) $(3x + 4y)(3x - 4y) =$
3) $(a^2 + 2b)^3 =$
4) $(x + 3)(x + 4) =$
5) $(2m - n)^3 =$
6) $(9 + 2x)(9 - 2x) =$
7) $(4a^2 - 3b^3)^2 =$
8) $(x + 8)(x - 5) =$
9) $(2x^2 + 8)^2 =$
10) $(x^2 + 3y)^3 =$
11) $(2a^2 + 3b^2)^2 =$
12) $(x - 3)(x + 3) =$
13) $(x + 2y)^3 =$
14) $(x + 2)(x + 4) =$

En cada caso, halle una expresión para la longitud del lado del cuadrado:

1)

Área
$y^2 + 6y +$
9

2)

Área
$36x^2 - 60x + 25$

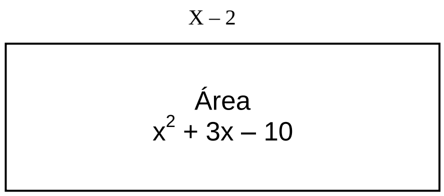
Dadas las expresiones para el área de un rectángulo y la longitud de uno de sus lados, halle una expresión para el otro lado:

$y + 3$

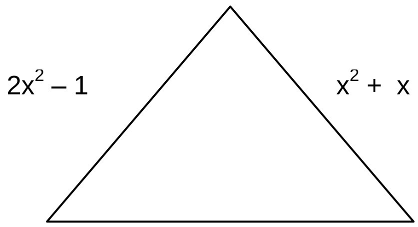
1)

Área
$y^2 + 7y + 12$

2)



Determina el lado desconocido de un triángulo sabiendo que su perímetro ésta dado por: $4x^2 + 3x - 1$.



IV. <u>FACTORIZACIÓN.</u>

FACTOR COMÚN MONOMIO

Halla el factor común de los siguientes ejercicios:

1. $6x - 12 =$	
2. $24a - 12ab =$	
3. $14m^2n + 7mn=$	
4. $8a^3 - 6a^2 =$	
5. $ax + bx + cx =$	
6. $b^4 - b^3 =$	
7. $14a -21b + 35 =$	
8. $20x - 12xy + 4 xz =$	
9. $10x^2y - 15xy^2 + 25xy=$	
10. $2x^2 + 6x + 8x^3 - 12x^4 =$	
11. $15x^4 - 12x^3 + 35x^2 -27x =$	

FACTOR COMÚN POLINOMIO

Encuentra el factor común:

12. $a(x + 1) + b(x + 1) =$	
13. $x^2(p + q) + y^2 (p + q) =$	
14. $(1 - x)+ 5c(1 - x) =$	
15. $(x + y)(n+1) - 3(n+1)=$	
16. $a(a + b) - b(a+b)=$	
17. $m(2a+b)+p(2a+b)=$	
18. $(a^2 +1) - b(a^2 +1)=$	
19. $(a+1)(a - 1) - 2 (a - 1)=$	
20. $a(2 +x) -(2+x)=$	
21. $(2x + 3)(3 - r) - (2x + 5)(3 - r) =$	

FACTORIZACIÓN DE UN TRINOMIO DE LA FORMA $x^2 + bx + c$

Ejercicios: Factoriza los siguientes trinomios en dos binomios;

22. $x^2 + 4x + 3 =$	
23. $b^2 + 8b + 15 =$	
24. $r^2 – 12r + 27 =$	
25. $h^2 – 27x + 50 =$	
26. $x^2 + 14xy + 24y^2 =$	
27. $x^2 + 5x + 4 =$	
28. $a^2 + 7a + 10 =$	
29. $x^2 – x – 2 =$	
30. $s^2 – 14s + 33 =$	
31. $y^2 – 3y – 4 =$	
32. $m^2 + 19m + 48 =$	
33. $x^2 – 12x + 35 =$	
34. $x^2 - 12x + 36 =$	

FACTORIZACIÓN DE UN TRINOMIO DE LA FORMA $ax^2 + bx + c$

35. $5x^2 + 11x + 2 =$	
36. $4x^2 + 7x + 3 =$	
37. $5 + 7b + 2b^2 =$	
38. $5c^2 + 11cd + 2d^2 =$	
39. $6x^2 + 7x – 5 =$	
40. $3m^2 – 7m – 20 =$	
41. $5x^2 + 3xy – 2y^2 =$	
42. $6a^2 – 5a – 21 =$	
43. $3a^2 + 10ab + 7b^2 =$	
44. $4h^2 + 5h + 1 =$	
45. $7x^2 – 15x + 2 =$	
46. $2x^2 + 5x – 12 =$	
47. $6a^2 + 23ab – 4b^2 =$	
48. $8x^2 – 14x + 3 =$	
49. $7p^2 + 13p – 2 =$	
50. $2x^2 – 17xy + 15y^2 =$	
51. $4x^2 + 4xy + y^2 =$	

FACTORIZACIÓN DE LA DIFERENCIA DE DOS CUADRADOS

Ejercicios:

52. $9a^2 – 25b^2 =$	
53. $4x^2 – 1 =$	
54. $36m^2n^2 – 25 =$	
55. $169m^2 – 196n^2 =$	
56. $\frac{9}{25}a^2 - \frac{49}{36}b^2 =$	
57. $3x^2 - 12 =$	
58. $8y^2 – 18 =$	
59. $16x^2 – 100 =$	

60. $9p^2 - 40q^2 =$	
61. $49x^2 - 64t^2 =$	
62. $121x^2 - 144k^2 =$	
63. $36x^2 - 25y^2 =$	
64. $5 - 180f^2 =$	
65. $4a^2 - 162a^3 =$	
66. $25x^2 - 16y^4 =$	

FACTORIZACIÓN DE LA DIFERENCIAS DE CUBOS $a^3 - b^3$.

67. $64 - x^3 =$	
68. $27m^3 + 8n^6 =$	
69. $\frac{1}{8}x^3 + \frac{8}{27} =$	
70. $8\,a^3b^3 + 27 =$	
71. $x^6 - y^6 =$	
72. $x^3 - \frac{1}{64} =$	
73. $x^6 + 125 =$	
74. $343x^3 - 8 =$	
75. $x^3y^9 + 216 =$	
76. $216a^{12} - 8b^9 =$	

Escribe en el paréntesis el término que hace que cada proposición sea verdadera.

a) $(a - 7)\ (a + 7) = a2 - (\quad\quad)$

b) $(m^2 - 3n)\ (m^2 + 3n) = (\quad\quad) - 9n2$

c) $(y + 3)\ (y + 7) = y^2 + (\quad\quad) + 21$

d) $(3p - 1)\ (3p + 7) = 9p^2 + (\quad\quad) + (\ )$

e) $3p + 18 = 3((\quad) + (\quad))$

f) $15yz + 5y^2z^2 = (\quad\quad)\ (3 + yz)$

g) $9 - p^2 = (3 + (\quad))\ ((\quad) - p)$

h) $49m^6 - 64n^4 = ((\quad\quad) + 8n^2)\ ((\quad\quad) - (\quad\quad))$

V. <u>Lenguaje matemático.</u>

Traducir cada una de las siguientes frases en una expresión matemática:

1. Un número aumentado en seis.	
2. Un número disminuido en tres.	

3. Cinco veces un número.	
4. El doble de un número aumentado en 8.	
5. El triple de un número disminuido en 6.	
6. La edad de un niño hace 5 años.	
7. Un número aumentado por el doble de sí mismo.	
8. Un número multiplicado por tres veces el numero menos dos.	
9. Un terció de un número.	
10. El doble de un número aumentado en la mitad del mismo número.	

VI. <u>PROBLEMAS QUE DAN ORIGEN A ECUACIONES DE PRIMER GRADO.</u>

1) Un número excede a otro en 5 y su suma es de 29, ¿Cuáles son?

2) La diferencia entre dos número es de 8. Si se le suma 2 al mayor y el resultado será tres veces el menor. Encontrar los números.

3) ¿Cuáles son los números cuya suma es 58 y su diferencia 28?

4) Si a 288 se le suma un cierto número el resultado es igual a tres veces el exceso del número sobre 12. Encontrar el número.

5) En una escuela, la mitad de los alumnos menos seis poseen automóviles. El total de automóviles propiedad de los alumnos es de 198. ¿Cuántos alumnos hay en la escuela?

6) El peso máximo permitido en un elevador es de 1500 libras.
   a. ¿Cuántos adultos y niños pueden soportar si el peso promedio por adulto es 150 libras y por niño es de 40 libras?
   b. Si se suben 10 niños, ¿Cuántos adultos pueden subir?
   c. Si ningún adulto se sube, ¿Cuántos niños pueden subir?

7) La compañía manufacturera Mirada fabrica sacapuntas. A la compañía le cuesta $105.00 hacer cada sacapuntas eléctrico y los vende a $270.00.
   a. ¿Cuál es la ganancia total en función de los sacapuntas?
   b. ¿Cuántos sacapuntas deben ser vendidos para tener una ganancia de $2,000,000.00 de pesos?
   c. ¿Cuál es la ganancia sobre 50,000 sacapuntas?

8) Una llave puede llenar un depósito en 4 minutos, otra llave en 8 minutos y un desagüe puede vaciarlos, estando lleno, en 20 minutos. ¿En cuánto tiempo se llenara el depósito, si estando vacío y abierto el desagüe se abren las dos llaves?

9) Un parque de diversiones cobra $60.00 por personas, pero tiene boletas de promoción a mitad de precio. Si en un día se obtuvieron ingresos de $29,220.00 al vende 549 boletos. ¿Cuántos boletos de cada tipo fueron vendidos?

10) Si un rectángulo tiene una longitud que es tres centímetros menor que cuatro veces su ancho y su perímetro es 19 cm. ¿Cuáles son las dimensiones del rectángulo?

11) En un triángulo rectángulo, uno de sus ángulos mide 15° más que dos veces el otro ángulo agudo. ¿Cuál es el valor de cada ángulo?

12) La suma de las edades de mis tres hijos es de 22 años. Si el mayor tiene tres amos que el segundo y el doble de la edad del tercero. ¿Cuál es la edad de cada una de ellos?

13) Kara viajo 75 millas y su velocidad promedio fue de 55 millas por hora. ¿Cuántos horas más debe conducir Kara para recorrer un total de 350 millas?

14) Cuando Luis venda 2 cubetas más, habrá vendido 3 veces la cantidad de cubetas que vendió José. Si Luis ha vendido 19 cubetas, ¿Cuántas vendió José?

15) La longitud total de un camino nuevo será de 18 millas Las tres primeras millas de este nuevo camino ya están pavimentadas. Si cada día se terminan el mismo número de millas, ¿Cuántas millas se necesitan pavimentar por día para terminar el camino en 5 días?

16) El número de varones en el club de tenis es 10 más que la mitad del número de mujeres. Si hay 30 varones, ¿Cuántas personas, entre hombres y mujeres, hay en el club?

17) Un cajero trabaja a un ritmo de 3 minutos por cliente, y otro cajero trabaja a un ritmo de 2 clientes por minuto. ¿A cuántos clientes atienden en una hora?

18) Separar 53 en dos partes en tal forma que la mayor tenga 3 unidades más que la menor.

19) Un maestro carpintero y su ayudante trabajaron en una obra por seis días y ganaron $ 192.00. El maestro carpintero tiene un salario de $ 8.00 más por día que el de su ayudante. ¿Cuánto gana cada una por día?

20) Un equipo de beisbol hizo 17 carreras en tres juegos. En el primer juego hizo 5 carreras y en el segundo hizo el doble de las que logró en el tercero. ¿Cuántas carreras hizo en cada juego?

21) Suponer que una agencia de alquiler de automóviles cobra $20 por día y 22 centavos por milla ¿Qué tan lejos podemos viajar en un día por $ 130?

22) Sus primeras dos calificaciones en matemáticas fueron 77 y 65. ¿Qué calificación necesita en el tercer examen para tener un promedio de 75?

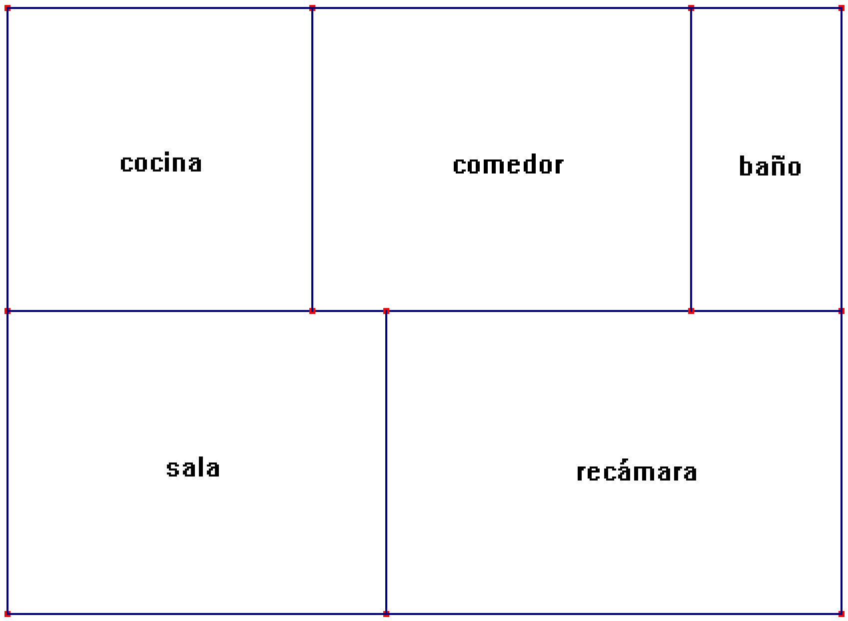
23) Un cajero contó 248 billetes de $ 200 y $ 50 y en total hay $ 22, 150. ¿Cuántos billetes de $ 200 y de $ 50 hay?

24) Dos monedas raras tienen un valor de $ 90, si el valor de una de ellas es una y media veces el valor de la otra ¿Cuánto vale cada moneda?

PROBLEMAS EXTRAS

1) Departamento Incógnita.

25) En el plano de un departamento, la cocina es cuadrada y mide x+6 de lado, la recámara tiene el mismo ancho que la cocina y su largo excede en 2x unidades su ancho. El otro lado del baño mide un tercio del largo de la recámara y su ancho es igual al de los cuartos anteriores como se puede advertir en el plano. Finalmente, el área de la sala es x2+14x+48 y su ancho es también x+6.



26)

Determina:

a) La expresión que da el área de la cocina.
b) El área del comedor.
c) Si el valor de x es de 2 metros, calcula las dimensiones del departamento y comprueba las expresiones que obtuviste.

2) Los peluqueros atribulados

Un peluquero atiende un promedio de 72 clientes por semana y cobra $18 por cada corte. Quiere aumentar sus ingresos y piensa que puede lograrlo subiendo los precios, pero estima que por cada incremento de $2 en el precio por corte perderá 5 clientes.

Cuestionario

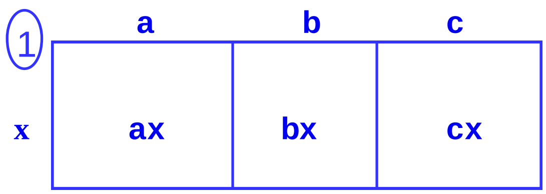
(1) Haz una tabla que contenga las columnas de número de incrementos de $2, de precio por corte, de número de clientes, de ingresos, de primeras diferencias de ingresos y de segundas diferencias de ingreso. Explica el significado de los valores que obtuviste en las dos últimas columnas.
(2) Traza la gráfica de número de clientes versus ingresos.
(3) Traza la gráfica de precio por corte versus ingresos.
(4) Traza la gráfica de número de incrementos de $2 versus ingresos.
(5) ¿Cuáles son los precios que puede cobrar para tener ingresos mayores a los actuales?
(6) ¿En qué condiciones tiene ingresos nulos?
(7) ¿En qué conjuntos de valores las gráficas son crecientes? Explica lo que significa cada caso.
(8) ¿En qué conjunto de valores las gráficas son decrecientes? Explica lo que significa cada caso.
(9) Interpreta la pendiente del segmento entre dos valores consecutivos en cada una de las gráficas.
(10) ¿Qué precios debe cobrar si quiere tener ingresos superiores a $1000 semanales?
(11) ¿Cuánto debe cobrar por corte de pelo para obtener los mayores ingresos semanales?
(12) Escribe tres preguntas sobre el caso del peluquero, y respóndelas.
(13) Inventa un problema inspirado en las tribulaciones del peluquero, incorporando otros factores que lo hagan más real. De ser posible consulta con un peluquero.
(14) ¿Otro peluquero?

Otro peluquero atiende un promedio de 72 clientes por semana y cobra $18 por cada corte. Quiere aumentar sus ingresos y piensa que puede lograrlo subiendo los precios, pero estima que por cada incremento de $1 en el precio por corte perderá 6 clientes.

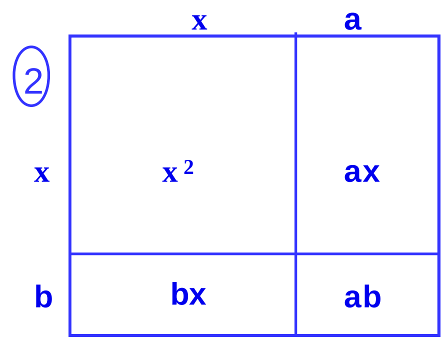
Elabora un cuestionario similar al del problema del otro peluquero y determina el precio que debe cobrar para obtener los mayores ingresos semanales.

3) Identidades algebraicas

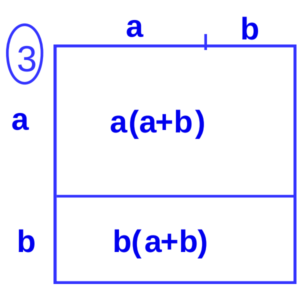
Observa cuidadosamente las siguientes figuras y establece la relación que hay entre cada figura y la identidad algebraica correspondiente. Redacta un párrafo para cada figura y destaca en tu descripción los elementos que te ayudaron a establecer la relación.



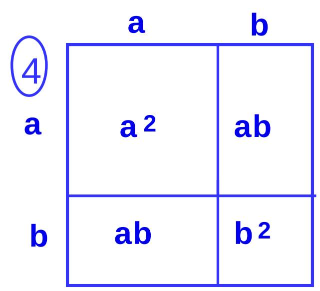
$x(a+b+c) \equiv xa + xb + xc$



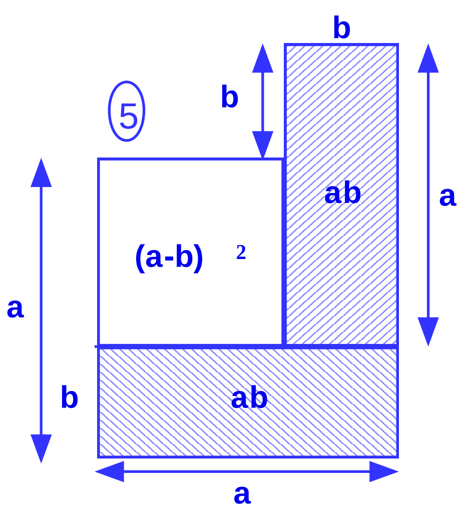
$(x+a)(x+b) \equiv x^2 + ax + bx + ab$



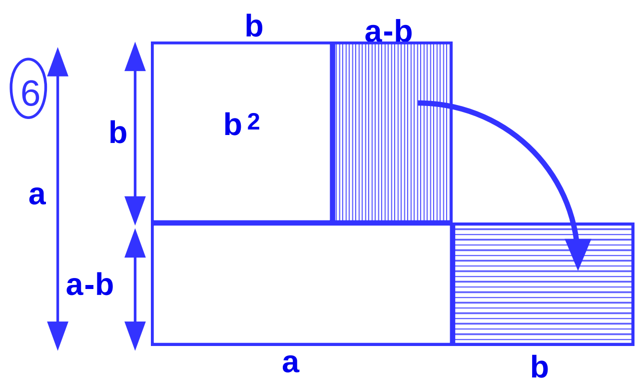
$(a+b)^2 \equiv a(a+b) + (a+b)b$



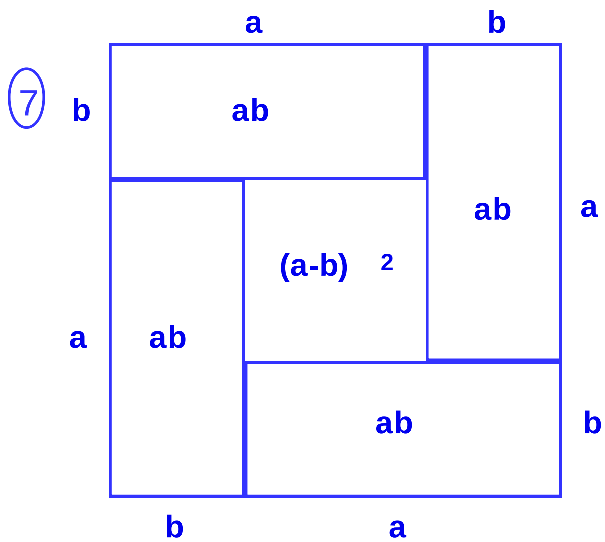
$(a+b)^2 \equiv a^2 + 2ab + b^2$



$(a-b)^2 \equiv a^2 - 2ab + b^2$

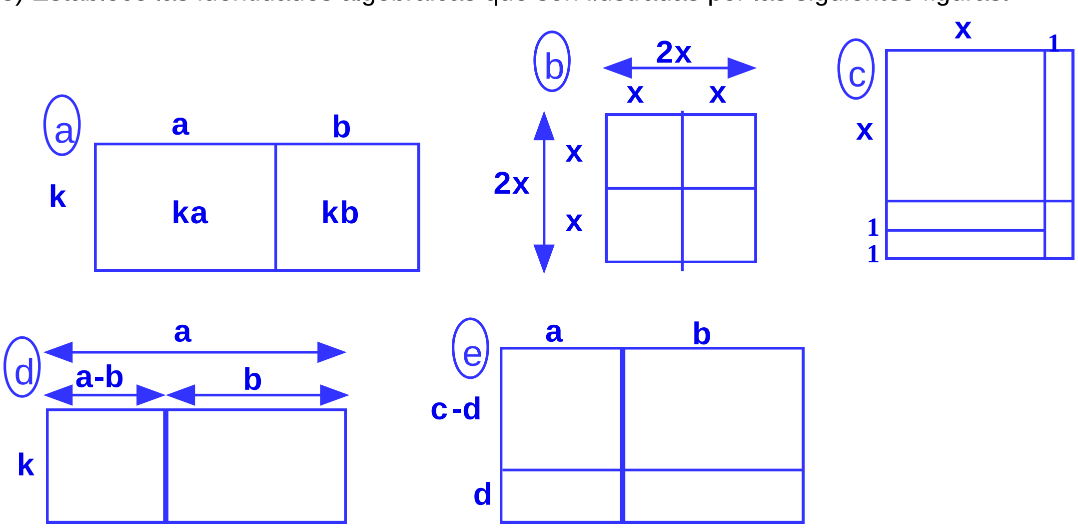


$a^2 - b^2 \equiv (a+b)(a-b)$



$(a+b)^2 - (a-b)^2 \equiv 4ab$

(8) Establece las identidades algebraicas que son ilustradas por las siguientes figuras.



(9) Representa por medio de figuras las siguientes identidades algebraicas:

a) $(x+3)(x-2) \equiv x^2 + x - 6$
b) $(a-b)(2a-b) \equiv 2a^2 - 3ab + b2$
c) $(a+b+c)^2 \equiv a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac$
d) $(a+b)(x+y+z) \equiv ax + ay + az + bx + by + bz$

(10) AB es un segmento de recta con punto medio en C, que se prolonga por B hasta D. Dado que AD = 2AB, representa por medio de una figura la relación AD*BD = $8AC^2$. Establece la identidad algebraica correspondiente, con AC=x.

(11) A, B, C, D son cuatro puntos colocados en orden sobre una línea recta. Representa por medio de una figura la relación AC*BD = AB*CD + AD*BC. Te ayudará rebautizar a los segmentos AB, BC, CD como x, y, z, respectivamente. Establece la identidad algebraica correspondiente.

(12) El segmento AB, con punto medio en C, se prolonga por B hasta un punto cualquiera D. Representa por medio de una figura AC*AD = CB*BD + $2AC^2$. Establece la identidad algebraica correspondiente.

BIBLIOGRAFÍA.

Algebra con aplicaciones
Phillips, Elizabeth P. y Butts, Thomas y Shaughnessy, Michael
Editorial OXFORD
Edición 2005

Álgebra, Libro del Estudiante
Academia Institucional de Matemáticas
Editorial IPN
1era Edición, 2005.

PÁGINAS WEB DE CONSULTA.

Aritmética y Álgebra
http://www.aulamatematica.com/BC1/01_Reales/Reales_index01.htm

POLINOMIOS: APLICACIONES
http://recursostic.educacion.es/descartes/web/materiales_didacticos/Aplicacion_de_polinomios/index.htm

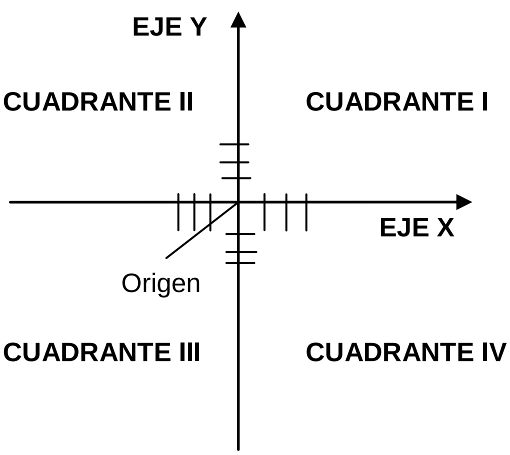
Álgebra
http://www.vitutor.net/1/5.html

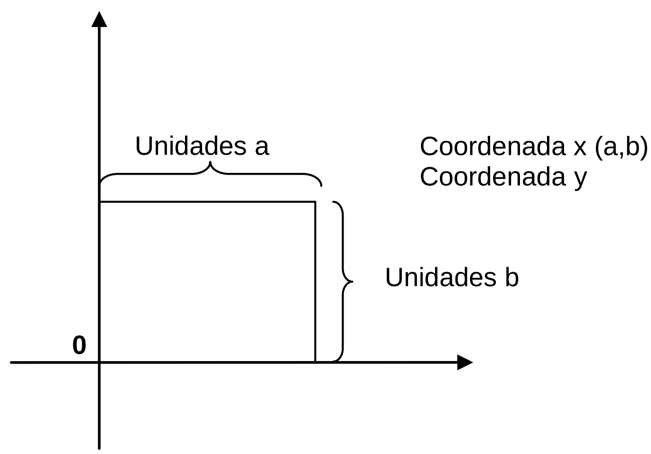
UNIDAD III. FUNCIONES Y ECUACIONES LINEALES.

COMPETENCIA PARTICULAR DE LA UNIDAD:
Emplea las funciones y ecuaciones lineales en la solución de problemas que se presentan en su entorno académico, personal y social.

RAP 1.
Identifica elementos de las funciones lineales a partir de representaciones tabulares, gráficas y algebraicas en su ámbito personal y social.

SISTEMA DE COORDENADO CARTESIANO

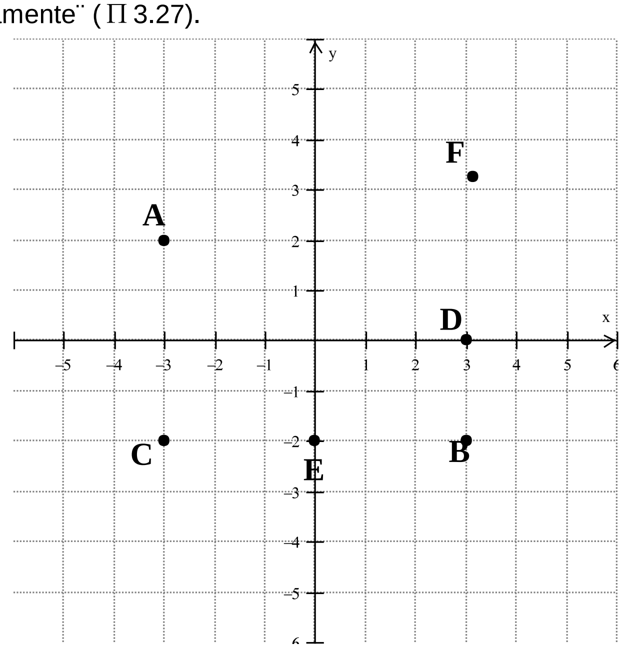




EJEMPLO

Localizar cada uno de los siguientes puntos en la grafica:
A (-3,2) B (3-,2) C(-2,-2) D(3,0) E(0,-2) F(Π 3.27)

SOLUCIÓN:
Para localizar el punto A (-3,2), comenzamos en el origen y vamos ala izquierda de tres unidades y luego dos unidades hacia arriba. Un procedimiento semejante permitirá localizar otros puntos. Nótese que la localización del punto F si es ¨aproximadamente¨ (Π 3.27).



Ejemplo

Trazar una grafica que represente las soluciones de cada una de las siguientes ecuaciones.

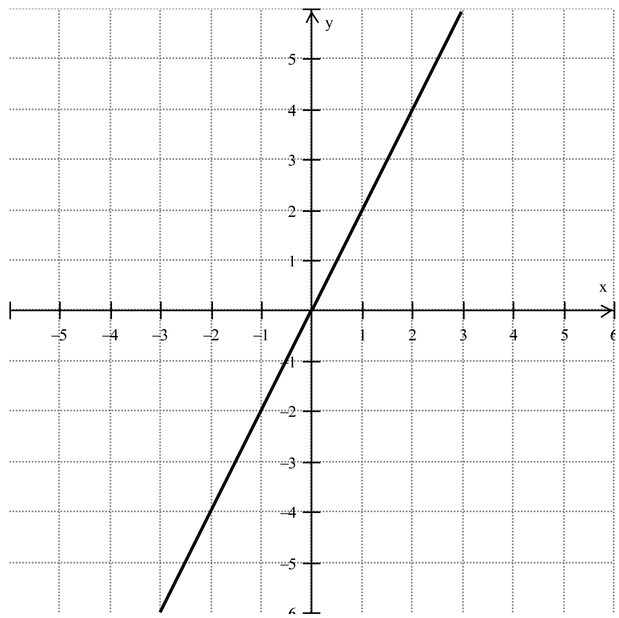
y = 2x
y =2x+3
x/2+2y/3=4

Soluciones

El procedimiento fundamental es hallar un número de puntos sobre la gráfica y luego trazar una recta a través de ellos. Para encontrar estos puntos seleccionamos al azar algunas soluciones de la ecuación y las combinamos en una tabla.

a) y=2x

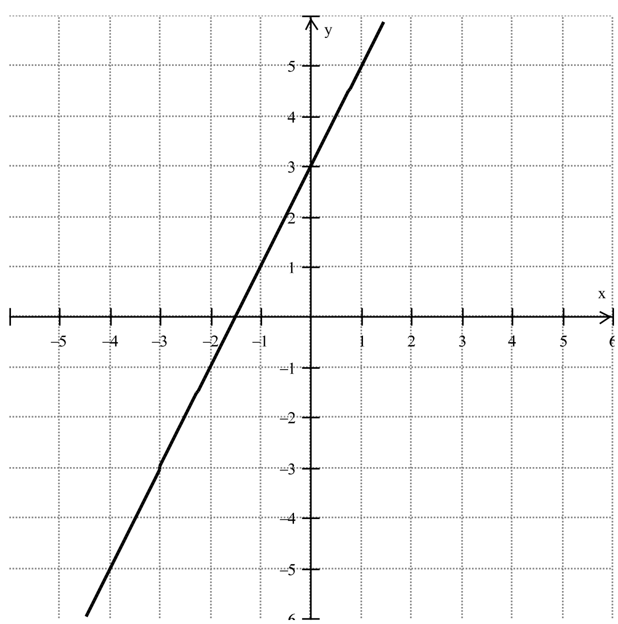
x	0	1	2	4	-1	- 2	-3
y	0	2	4	8	- 2	- 4	- 6



Para determinar las soluciones, escogemos un valor para "x" y lo sustituimos en la ecuación para hallar un valor correspondiente de "y". Por ejemplo si x=0, entonces y=0, si x=5 entonces y=2(5)=10. También podríamos haber seleccionado un valor para "y" y luego determinar el valor correspondiente de "x"

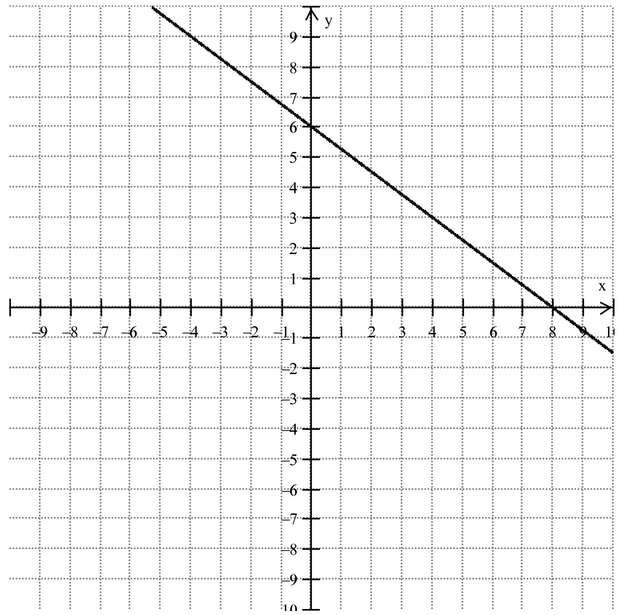
b) y=2x + 3

x	0	1	2	-1	-2	-3/2
y	3	5	7	1	-1	0



c) $\frac{x}{2}+\frac{2y}{3}=4$

x	0	8	4	2	-1
y	6	0	3	9/2	27/4



GRÁFICAS DE ECUACIONES LINEALES

La gráfica de las soluciones de cualquier ecuación de la forma
$y=mx+b$

O más generalmente,

$ax+by=c$
Donde a y b no son ambas iguales a cero, es una línea recta

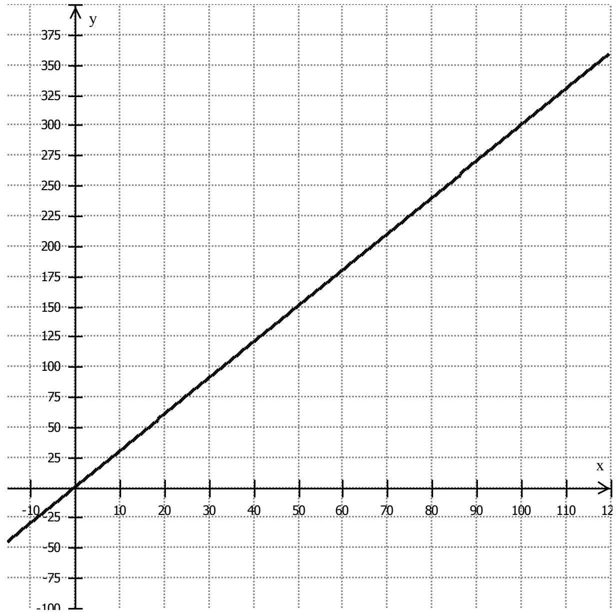
Ejemplo

La compañía ZARDOS está planeando producir pizzas cuadradas. A la compañía le costará $2hacer cada pizza y las venderá a $5 cada una.

Escribir una ecuación que describa la ganancia por la venta de pizzas.
Graficar la ecuación
¿Cuánto se puede ganar con 50 pizzas?
¿Cuántas pizzas deberán ser vendidas en un día para tener una ganancia de $300?

Soluciones

Sea x el número de pizzas vendidas.
Ganancia= Ingreso-Costo
P=5x-2x
P=3x



En la gráfica observamos que 50 pizzas darán una ganancia de \$150. La ecuación da p=3 (50)= \$150
En la gráfica observamos que 100 pizzas darán una ganancia de \$300, y de la ecuación tenemos 300=3x, o sea, x=100

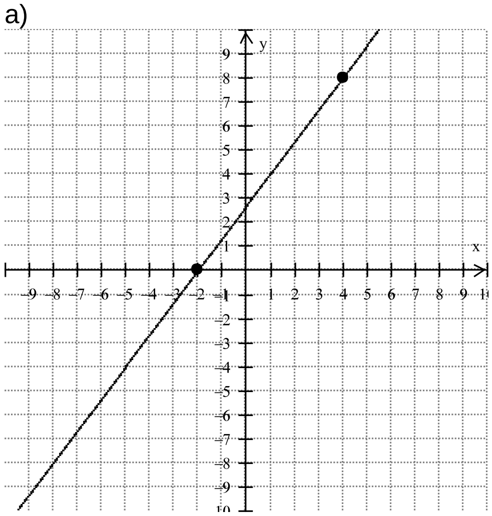
Para cualquier recta no vertical, la pendiente de la recta es $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{\text{cambio vertical}}{\text{cambio horizontal}} = \dfrac{\text{desnivel}}{\text{corrimiento}}$

Para cualesquiera dos puntos (x_1,y_1) y (x_2,y_2) sobre la recta

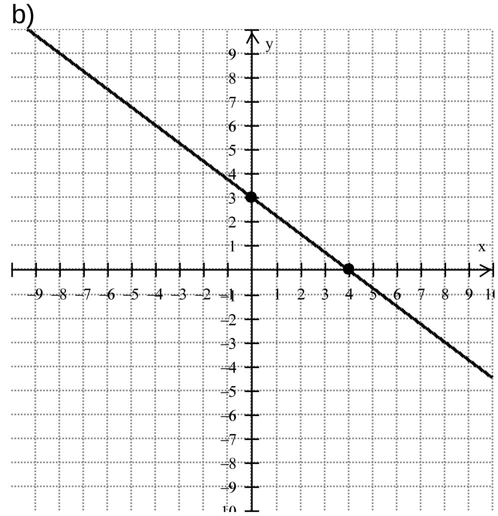
Ejemplo

Hallar la pendiente de las rectas indicadas en cada caso

a)



b)



c) y = 2x+1

d) 3y+6x=12

Soluciones:

Sea
$(-2,0)= (x_1,y_1)$

$(4,8) = (x_2,y_2)$

Entonces

Pendiente= $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

Pendiente= $\frac{8-0}{4-(-2)}$

Pendiente= $\frac{8}{6} = \frac{4}{3}$

Nota: No importa a cual punto le llamamos (x_1,y_1) . Esto es si $(x_1,y_1)= (4,8)$ y si $(x_2,y_2)= (-2,0)$, entonces

Pendiente= $\frac{0-8}{-2-4} = \frac{-8}{-6} = \frac{4}{3}$

Sea
$(x_1,y_1)= (4,0)$
$(x_2,y_2) = (0,3)$

Entonces

Pendiente= $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

Pendiente= $\frac{3-0}{0-4} = \frac{3}{-4} = \frac{-3}{4}$

Podemos elegir cualquiera dos puntos sobre la recta y=2x + 1. Las intercepciones servirán muy bien, (0,1) & (-1/2,0).
Sea
$(x_1,y_1) = (0,1)$
$(x_2,y_2) = (-1/2,0)$

Entonces

Pendiente= $\frac{0-1}{-1/2-0} = \frac{-1}{-1/2}$

Pendiente= 2

Notase que la pendiente m es el coeficiente de 2x. Recuérdese que la forma pendiente intercepción de una recta es y=mx+b. De aquí la pendiente= 2 = m y la ordenada y de la intercepción en el eje y es 1, que es b en la ecuación.

Elegimos cualesquiera dos puntos de la recta 3y+6x =12, digamos (0,4) y (1,2).

Sea
$(x_1,y_1)=(0,4)$
$(x_2,y_2)=(1,2)$

Entonces

Pendiente= $\frac{2-4}{1-0} = \frac{-2}{1} = -2$

Escribamos 3y+6x=12 en la forma y= mx + b resolviendo para y:
3y + 6x = 12
3x = -6x + 12
y = -2x + 4

Nótese nuevamente que la pendiente es el coeficiente de x. Pendiente=m=-2. La intercepción y es (0,4) y b = 4
Delos ejemplos anteriores podemos deducir los siguientes:

PENDIENTE E INTERCEPCIÓN Y DE UNA RECETA

Si la ecuación de una recta esta en forma y=mx + b entonces **m** es la pendiente y **(0,b)** es la intersección con el eje y.
Si m es la pendiente y (0, b) es la intersección en el eje y para una recta dada, entonces la ecuación de la recta es y=mx+b

Por esto la ecuación línea y=mx + b se llama pendiente-intersección

Considere el siguiente conjunto de 2 ecuaciones lineales

$$ax + by = e$$
$$cx + dy = f$$

La gráfica de estas ecuaciones es una recta. Un sistema de 2 ecuaciones y 2 variables se denomina línea de 2x2. La pareja de valores (x, y) que satisfacen simultáneamente las 2 ecuaciones se llama la solución del sistema. Estos valores de x & y son las coordenadas del punto de intersección de las 2 rectas.

RAP 2.
Elabora modelos que den lugar a ecuaciones y/o sistemas lineales a partir de situaciones de la vida cotidiana y las ciencias.

METODOS PARA RESOLVER UN SISTEMA LINEAL DE 2x2

A. Graficación
1.- Grafique cada ecuación lineal
2.- Estime las coordenadas del punto de intersección

Sustitución
1.- Despeje una variable de una de las ecuaciones
2.- Sustituya la expresión de esta variable en la otra ecuación

O bien

1.- Despeje la misma variable en cada ecuación
2.- Iguale las 2 cantidades

Luego

3.- Resuelva la ecuación lineal resultante
4.- Sustituya la ecuación del paso 3 en una de las ecuaciones originales y despeje la segunda variable.
5.- Compruebe los valores de x & y en las 2 ecuaciones originales
6.- Plantee las soluciones

C. Adición (eliminación)
1.- Escriba ambas ecuaciones en la forma Ax + By = C
2.- Multiplique una o varias ecuaciones por un numero tal que los coeficientes de una variable serán los mismos y opuestos el uno al otro.
3.- Sume o reste las 2 ecuaciones para obtener una nueva ecuación en una variable
4.- Despeje la variable de la nueva ecuación
5.- Sustituya el valor de una de las ecuaciones originales y despeje la segunda variable
6.- Compruebe el valor para x y y en las 2 ecuaciones originales
7.- Plantee las soluciones

EJEMPLO

Resolver cada uno de los siguientes sistemas lineales por el método de sustitución o el de adición.

a) $2x - 3y = 7$
$-2x + 4y = -8$

b) $3x – y = 2$
$x – 3y = -10$

SOLUCIONES
$2x – 3y = 7$
$-2x + 4y = -8$

En este problema, despejar x o y en una de las ecuaciones para sustituir en la segunda ecuación implica cálculos con fracciones. Por ejemplo, en la primera ecuación $x= (3y + 7)/2$ y $y= (2x – 7)/3$.
Probaremos el método de adición:

$2x – 3y = 7$ Los coeficientes de los términos x son opuestos
$-2y + 4y = -8$

$0 + y = -1$ Se suman las dos ecuaciones
$y = -1$ Se despeja y
$2x – 3(-1) = 7$ Se sustituye $y = -1$ en la primera ecuación y se despeja x
$2x = 4$
$x = 2$
Comprobación si $x = 2$ y $y = -1$, entonces

$2 (2) - 3 (-1) = 7$ y $-2 (2) + 4 (-1) = 8$
$4 + 3 = 7$ $-4 – 4 = -8$
$7 = 7$ $-8 = -8$

La solución es $x = 2$ & $y = -1$ o sea (2,-1)

$3x – y = 2$
$X – 3y = -10$

Observamos que el coeficiente de x en la segunda ecuación es 1. Por lo tanto deberá ser fácil el método de sustitución:
$3x – y = 2$
$X – 3y = -10$
$X = 3y – 10$ Se despeja x en la segunda ecuación.
$3 (3y – 10) – y = 2$ Se sustituye x en la primera ecuación y se despeja y.

$9y – 30 – y = 2$
$8y = 32$
$Y= 4$

$3x – (4) = 2$ Se sustituye $y = 4$ en la primera ecuación y se despeja x
$8y = 32$
$Y = 4$

$3x – (4) = 2$ Se sustituye $y = 4$ en la primera ecuación y se despeja x
$3x = 6$
$X = 2$

Comprobación: Si $x = 2$ & $y = 4$. Entonces
$3 (2) – 4 = 2$
$6 – 4 = 2$
$2 = 2$

Y $2 – 3 (4) = - 10$

2 – 12= -10
-10 = -10
La solución es $x = 2$ & $y = 4$, o sea (2,4)

LA GEOMETRÍA DE DOS RECTAS

Dadas dos rectas, una de estas tres posibilidades debe ocurrir:

1. Las dos rectas son diferentes y se intersecan en un punto
2. Las dos rectas son paralelas y diferentes, por lo tanto no se intersecan
3. Las dos rectas son la misma, por lo tanto no tienen un número infinito de puntos en común.
4. La contraparte algebraica de estos fenómenos se presenta en el siguiente ejemplo.

Ejemplo
Resolver cada uno de los siguientes sistemas graficando y por medio de un método algebraico.

a. $3x + 2y = 4$ b. $3x + 2y = 4$ c. $3x + y = 3$
$6x + 4y = 21$ $6x + 4y = 8$ $5x + 2y = 5$

SOLUCIONES:
a.-
$3x + 2y = 4$
$6x + 4y = 21$

$6x + 4y = 8$ Se multiplica la primera ecuación por 2
$6x + 4y = 21$ Se resta

$0=-13$ una contradicción

Como se obtuvo una contradicción no existe una solución como se observa en la grafica. Las rectas son paralelas (las pendientes son -3/2), así que no ahí punto de intersección, o no hay solución. Si un sistema de ecuaciones no tiene solución, el sistema se llama inconsistente.

b.-
$3x + 2y = 4$
$6x + 4y = 8$

$6x + 4y = 8$ Se multiplica la primera ecuación por 2
$6x + 4y = 8$ Se resta

$0=0$

Sin embargo $0 = 0$ es siempre cierto. De modo que cualquier pareja de número que sea una solución a una ecuación también es una solución a la otra ecuación. Eso también puede verse en la grafica, la cual muestra que las rectas coinciden. Por lo tanto, tienen un número infinito de puntos en común o un número infinito de soluciones.

c.-
$3x + y = 3$ Ecuación 1
$5x + 2y = 5$ Ecuación 2

$y = 3 – 3x$ se despeja y en la ecuación 1
$5x + 2 (3 – 3x)= 5$ se sustituye en la ecuación 2

$5x + 6 – 6x = 5$
$-x = -1$ se despeja x
$X=1$

$5 (1) + 2y = 5$ se sustituye $x = 1$ en la ecuación 2
$Y=0$ se despeja y

La solución es $x = 1$ & $y = 0$, o sea (1,0). Esto se puede ver en la grafica, la cual tiene un punto de intersección o una solución.

Dos rectas diferentes pueden intersecarse en, a lo mas un punto, así un sistema lineal de 2x2 tiene a lo mas una solución. Un sistema lineal de 2x2 puede no tener solución si las dos rectas son paralelas o un número infinito de soluciones si las dos ecuaciones son realmente dos representaciones de la misma recta y por lo tanto no son rectas diferentes.

SISTEMAS LINEALES DE 3x3

La gráfica de la ecuación $ax + by + cz = m$, no es una recta. En un plano de tres dimensiones. Sin embargo, todavía nos referimos, al siguiente sistema de ecuaciones en tres variables.

$ax + by + cz = m$
$dx + ey + fz = n$
$gx + hy + iz = p$

Como un sistema lineal de 3x3. Cada variable es de primer grado. Tal sistema puede resolverse utilizando el método de adición, como hicimos para un sistema lineal de 2x2.

PROCEDIMIENTO PARA RESOLVER UN SISTEMA LINEAL DE 3x3

1. Utilice cualesquiera dos ecuaciones y elimine una de las tres variables utilizando el método de adición. Llame a esta ecuación 4.
2. Repita el paso 1 utilizando una pareja diferente de ecuaciones para eliminar la misma variable… Llame a esta ecuación 5.
3. Resuelva el sistema de 2x2 formado por las ecuaciones 4 & 5
4. Utilice las soluciones del paso 3 para sustituir en una ecuación original y obtener el valor de la tercera variable.
5. Compruebe las soluciones en las ecuaciones originales.

EJEMPLO

Resolver cada sistema lineal de 3x3.

a.-	$x + y - z = -2$	b.-	$2x - y + z = -1$
	$2x + z = 7$		$x + y - 2z = 5$
	$x + y + 3z = 10$		$x - 4y - 3z = -4$

Soluciones:
a.-

$x + y - z = -2$	Ecuación 1
$2x + z = 7$	Ecuación 2
$x + y + 3z = 10$	Ecuación 3

Paso 1:

$X + y - z = -2$	Trataremos de obtener 2x2 en x & y por
$2x + z = 7$	eliminación de z
$3x + y = 5$ Ecuación 4	Sume las ecuaciones 1 & 2 para obtener una ecuación lineal en x & y

Paso 2:

$3x + 3y - 3z = -6$	Multiplique las ecuaciones 1x3.
$X + y + 3z = 10$	Copie la ecuación 3.
$4x + 4y = 4$	Sume estas 2 ecuaciones.

X + y = 1 Ecuación 5 Divida ambas partes entre 4.

Paso 3: Despejar x & y de las ecuaciones 4 & 5.
3x + y = 5 Ecuación 4
X + y = 1 Ecuación 5
2x = 4 Reste la ecuación 5 de la 4
X = 2 Substituya x = 2 en la ecuación 5
Y = -1 para encontrar a y.

Paso 4:
2 + (-1) – z = -2 Substituya x & y en la ecuación 1
Z = 3 Despeje z

Paso 5: Comprobación: Si x = 2, y = -1, & z = 3, entonces
2 + (-1) – (3) = - 2 y 2(2) + 3 = 7 y 2 + (-1) + 3(3) = 10
-2 = -2 7 = 7 10 = 10

La solución es x = 2, y = -1, & z = 3

b.-
2x – y + z = -1 Ecuación 1
X + y – 2z = 5 Ecuación 2
X – 4y – 3z = -4 Ecuación 3

Paso 1:
2x – y + z = -1 Elimine y & obtenga un sistema lineal
X + y – 2z = 5 de 2x2 en x & z

3x – z = 4 Ecuación 4 Sume la ecuación 1 & 2

Paso 2:
4x + 4y – 8z = 20 multiplique la ecuación 2x4
X – 4y – 3z = -4 Ecuación 5 Sume estas 2 ecuaciones

Paso 3:
Se despejan x & z
3x – z = 4 Ecuación 4
5x – 11z = 16 Ecuación 5

-33x + 11z = -44 Multiplique la ecuación 4 por -11
5x – 11z = 16 Ecuación 5

-28x = -28 Sume estas 2 ecuaciones
X = 1 Despeje x
Z = -1 Despeje z substituye x en la ecuación 4

Paso 4:
2(1) – y +(-1) = -1 Substituya x & z en la ecuación 1
Y = 2 Despeje y

Paso 5: Comprobación: Si x = 1, y = 2 & z = -1, entonces
2(1) – 2 +(-1) = -1 y 1 + 2 – 2(-1) = 5
-1 = -1 5 = 5
y 1 – 4(2) -3 (-1) = -4
-4 = -4

La solución es x = 1. Y = 2 & z = -1

RAP 3.
Utiliza modelos en la solución de problemas que den lugar a ecuaciones y sistemas lineales en situaciones de la vida cotidiana y las ciencias.

EJEMPLO

Usted está promoviendo un concierto para cierto grupo musical en un auditorio con 10 000 lugares. La mayoría de los conciertos cobran $ 10 por los lugares reservados y $ 7 por la admisión general y el promotor es el que determina el número de cada tipo de lugares. El grupo musical cobra $ 40 000 por la función. Los gastos de usted son de $ 20 000. ¿Cuántos lugares deberá asignar como reservados si desea tener una ganancia de $ 30 000?

Soluciones
Hay 2 posibilidades:

Una ecuación lineal: Los gastos son de $ 40 000 + $ 20 000 = $ 60 000. Si r es igual al número de lugares reservados, entonces 10 000 – r es el número de boletos de admisión general. Por lo tanto:

10r + 7(10 000 –r) – 60 000 = 30 000
(Ingresos) (Costos) (Ganancia)
10r – 7r = 30 000 – 10 000
3r = 20 000
R = 6667

Un sistema lineal: aquí hay realmente dos variables:
R = número de lugares reservados
G = número de admisión general

El sistema lineal es

R + g = 10 000 Ecuación 1 para los lugares
10r + 7g – 60 000 = 30 000 Ecuación 2 para la ganancia

7r + 7g = 70 000 Ecuación 1 Multiplíquese x la ecuación 1 por 7
10r + 7g = 90 000 Ecuación 2 Reformule la ecuación 2

-3r = -20 000 Se resta
R = 6667
G = 3333 Sustituyase r en la primera ecuación para obtener g

De aquí g = 3333 lugares de admisión general y r = 6 667 lugares reservados.
Compruebe la solución.

EJEMPLO

Una planta procesadora de alimentos pretende fabricar 900 galones de almíbar que contiene 50% de azúcar. Tiene en existencia almíbar que contiene 70% de azúcar, y otro con 20% de azúcar. ¿Cuántos galones de almíbar al 70% y del almíbar al 20% deberán ser utilizados para fabricar 900 galones de almíbar al 50%?

Soluciones
Utilizando x como el número de galones de almíbar al 70% resolvemos la ecuación lineal.
0.70x + 0.20 (900 – x) = 450

Nuevamente hay aquí dos variables: x igual al número de galones de almíbar al 70%

X + y = 900 900 galones de almíbar
0.70x + 0.20y = 0.50 (900) Cantidad de azúcar en almíbar

Nota: sustituyendo 7 = 900 – x en la segunda ecuación obtenemos la ecuación lineal anterior. Por el método de adición obtenemos

$0.20x + 0.20y = 180$ Multiplíquese la primera ecuación por 0.20
$0.70x + 0.20y = 450$

$-0.50x = -270$ Se resta
$X = 540$ Galones
$Y = 450$ Galones

Compruebe la solución. 540 galones de almíbar al 70% y 450 galones de almíbar al 20% se necesitan para hacer 900 galones de almíbar al 50%

EJEMPLO

Usted y su amigo desean verse. Usted vive en Cincinnati y el vive en Cleveland, a una distancia de 249 millas. Usted puede manejar hacia Cleveland a una velocidad promedio de 55 millas por hora, y el puede manejar a una velocidad promedio de 45 millas por hora. Usted sale al mediodía y el a la 1:00 PM. ¿A qué hora se encontrarán?

Soluciones
Sea x igual a su tiempo. Entonces el tiempo de su amigo es x – 1, ya que sale una hora más tarde. De este modo:

55x	+	45(x-1)	=	249
(su distancia)		(la distancia de su amigo)		distancia total

$100x – 45 = 249$
$100x = 294$
$X = 2.94$ horas
$X – 1 = 1.94$ horas

Podríamos hacer x igual a su tiempo, y y al tiempo de su amigo. Entonces tenemos el sistema
$X – y = 1$ Usted manejo una hora mas
$55x + 45y = 249$ La distancia total es de 249 millas

Sustituyendo y = x – 1 en la segunda ecuación nuevamente llegamos a la ecuación lineal original: 55x + 45(x – 1) = 249. El método de adición también funciona:

$45x – 45y = 45$ Se multiplica por 45
$55x + 45y = 249$

$100x = 249$ Se suman las 2 ecuaciones
$X = 2.94$ horas, su tiempo
$Y = 1.94$ horas, el tiempo de su amigo

Compruebe las respuestas.

Para las aplicaciones que hemos estudiado hasta ahora, podríamos resolver los problemas utilizando un sistema lineal con dos incógnitas o una ecuación lineal con una incógnita. Sin embargo hay problemas en donde las dos variables son obligatorias.

EJERCICIOS

1. Resuelve las siguientes ecuaciones.
   a) $-3x + 7 = 5x + 13$

b) $101x + 102 = 103x + 104$

c) $0.3x – 0.24 = 0.2x + 0.09$

d) $0.02x + 3.75 = 0.8x – 0.15$

e) $3(x – 4) = -4$

f) $-2(x+5) = 30 – x$

g) $ax – b = cx + d$

h) $ax + bx + c = dx + ex - f$

i) $8(3x – 5) – 4(2x + 3) = 12$

j) $5(x + 4) = -2(x - 3)$

k) $A = \frac{1}{2} h(B + x)$

l) $s = 4nx + 8x$

m) $3x – 9 = x + 3$

n) $2x – 5 = 5x + 4$

o) $-2(x – 1) – 5 = 3(x – 1) – 10$

p) $-2(x-1)-5=3(x-1)-10$

q) $3[2(x-1)-4] - 6 = 2(x-1)+10$

2. Determina el valor de ***x*** en las siguientes ecuaciones fraccionarias:

a) $\frac{x}{2}+\frac{x}{3}=5$

b) $\frac{x}{3}-\frac{1}{2}+\frac{5x}{6}=3$

c) $\frac{7}{2x} - \frac{8}{3x}+\frac{9}{4x} \quad \frac{1}{3}=\frac{31-7x}{6x}$

d) $\frac{x+3}{4} \quad \frac{x-4}{9}=\frac{1}{2} \quad \frac{x+1}{4}+\frac{2x+1}{9}$

e) $\frac{12}{5(x+3)}-\frac{7}{10}=\frac{4}{3(x+3)}-\frac{1}{30}$

f) $\frac{5}{2(2x-1)} - \frac{3}{3(2x-1)}+3=\frac{4}{3(2x-1)}+\frac{7}{6}$

g) $\frac{x-1}{x-3}+\frac{x-3}{x+1}=2$

h) $x - \frac{x}{a}=b$

i) $\frac{x-a}{b}+\frac{x-b}{a}=2$

j) $2y - 4 = \frac{5y-3y}{2}$

k) $\frac{8+10}{3}=\frac{4Y+8Y}{2}$

3. Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones por los 5 métodos. (Suma y resta, igualación, sustitución, determinantes y grafico).

a) x + y = 10
x – y = 4

b) x – y = 10
x + y = 4

c) 2x – y = 7
3x + 4y = 16

d) 3x + y = 7
4x – 5y =3

e) -2y = -6
5x – 7y = 106

f) 2x =10
7x – 5y = -30

g) 3x – 2y = 1
5x + 4y =9

h) 4x – 3y = 11
11x + 6y = 16

i) 3x + 2y =9
2x – 3y = 19

j) 4x - 3y = -1
-3x + 4y = 20

k) 5x + 3y = 13
7x – 5y = 18

l) 3x – 7y = 6
5x + 11y = -7

m) 9x +16y = 7
4y – 3x = 0

n) $6(x+4)-3(y-6)=12$
$-5(x+6)+2(y+6)=-9$

o) $\frac{X}{2}-\frac{Y}{4}=3$
$\frac{X}{5}-\frac{Y}{3}=-\frac{2}{3}$

p) 7x + 9y = 42
12x + 10y = - 4

q) $x+1=3x-4y$
$3y+1=x+2y$

r) $\begin{aligned} t + 2p &= 3t + 4 \\ p - t &= 14 + 3p \end{aligned}$

s) $\begin{aligned} \frac{2x}{3} + \frac{3y}{4} &= 2 \\ \frac{x}{6} + \frac{y}{2} &= -2 \end{aligned}$

t) $\begin{aligned} 2p + 3q &= 12 \\ 3p - q &= 1 \end{aligned}$

u) 2x – 5y = 7
-8x + 20y = 13

v) x + 2y = 8
5x + 10y = 8

Resuelva los siguientes sistemas lineales de 3x3 por cualquier método.

a) $\begin{aligned} x + y + z &= 1 \\ 2x - 3y &= 1 \\ x + 4y - z &= -8 \end{aligned}$

b) x + y – z = 6
x + y + z =12
x – 3y – z = 10

c) 2x – 3y + 5z = 11
5x + 4y – 6z = - 5
-4x + 7y – 8z = - 14

d) x + y = 5
y + z = 7
x + z = 6

e) x + y = 5
y + z = 7
x + z = 6

f) x – 4y = 11
2x + y = 4
-x – 3y + z = 3

g) 4x + 4y -3z = 3
2x + 3y + 2z = -4
3x – y + 4z = 4

h) x - y = 4
y – z = 1
x – z = 5

i) 2y – z = 6
y + 3z = -4
2x – y + z = -6

j) x + y – z = 6

$x + y + z = 12$
$x - 3y - z = 10$

k) $x + y + z = 6$
$x - y - z = 0$
$x + 3y - 2z = 11$

l) $2x - 3y + 5z = 11$
$5x + 4y - 6z = -5$
$-4x + 7y - 8z = -14$

m) $3x - y + 2z = 5$
$2x + 3y + z = 1$
$5x + y + 4z = 8$

Problemas sobre ecuaciones y funciones lineales

1. La suma de las edades de mis tres hijos es de 22. Si el mayor tiene tres años más que el segundo y el doble de la edad del tercero ¿cuál es la edad de cada uno de ellos?

2. Un cajero contó 248 billetes. Sólo tiene billetes de $200.00 y $50.00 y en total hay $22,150.00 ¿cuántos billetes de $200.00 y de $50.00 hay?

3. Dos monedas raras tienen un valor de $90.00 Si el valor de una de ellas es una y media veces el valor de la otra ¿cuánto vale cada moneda?

4. Un parque de diversiones cobra $60.00 por persona, pero tiene boletos de promoción a mitad de precio. Si en un día se obtuvieron ingresos de $29, 220.00 al vender 549 boletos, ¿cuántos boletos de cada tipo fueron vendidos?

5. La fórmula para convertir grados Celsius a Fahrenheit es de $°F = 9/5\ °C + 32$ donde ºC son los grados Celsius y ºF los grados Fahrenheit ¿A cuántos grados Celsius corresponden 32º, 70º y 212º grados Fahrenheit?

6. En una ciudad el costo de la electricidad está expresado por la fórmula $C = 0.07\,n + 6.5$, siendo C el costo y n la cantidad de kilowatt-horas consumidos. Calcula la cantidad de kilowatt-horas que corresponde a costos de $50.00, $76.50 y $125.00 respectivamente.

7. Un señor invirtió $14,000.00, parte al 7% y parte al 12% de interés anual. El ingreso anual debido a esas inversiones fue de $1,430.00. ¿Cuánto invirtió en cada una de las tasas?

8. ¿Cuánta agua se debe evaporar por ebullición para aumentar la concentración de 300 litros de sal, del 2 al 3%?

9. Varias personas avanzan por la carretera a razón de 5 km/h y forman una fila de 3 km de largo. Una de ellas, Antonio, va hasta el final de la misma. De repente se acuerda que tiene que darle un recado a su compadre Ricardo, que se encuentra al principio de la marcha. Se sube a una bicicleta y avanza a una velocidad de 25 km/h. ¿Cuánto tiempo le llevará a Antonio llegar hasta donde se encuentra su compadre, entregarle el recado y regresar hasta el final de la marcha?

10. Un televisor tiene un costo de $3,250.00, incluyendo el IVA del 15%. ¿Cuál es el precio del televisor sin IVA?

11. El dueño de un negocio paga diariamente a sus tres empleados $135.00. Determina lo que gana cada uno, sabiendo que el primero gana $10.00 más que el segundo, y éste el doble que el tercero.

12. Una caja sin tapa se puede hacer a partir de un pedazo rectangular de cartulina, recortando un cuadrado de lado x en cada vértice del rectángulo y doblando las pestañas que resultan de tal manera que queden perpendiculares a la base. Si partimos de una cartulina de tamaño carta de 216 por 279 mm:

a. Escribe una fórmula que te permita calcular el volumen de la caja especificando lo que representa cada variable y sus unidades.
b. Traza la gráfica de la función con x como variable independiente en el intervalo que representa el volumen de la caja.
c. Calcula las dimensiones de la caja que tiene el volumen máximo.

Problemas sobre sistemas de ecuaciones

1. Entre 1993 y 1997 el número de reproductores de discos compactos vendidos cada año en cierto país fue creciendo, y el número de tornamesas fue decreciendo. Dos modelos para calcular las ventas son los siguientes:
   a. Reproductores de discos compactos:
   b. Tornamesas: $S_d = -1700 + 496t$
   S_t=1972 – 8t

   en donde S_d y S_t representan las ventas anuales, en miles de unidades, de reproductores de discos compactos y tornamesas, respectivamente, y t representa el año calendario, con t = 3 correspondiente a 1993. Según estos modelos, ¿cuándo se esperaría que las ventas de reproductores de discos compactos rebasaran a las de tornamesas?

2. En 10 kg de una aleación hay 3 kg de zinc, 2 kg de cobre y 5 kg de plomo. En 20 kg de una segunda aleación hay 12 kg de zinc, 5kg de cobre y 3 kg de plomo, mientras que en 10 kg de una tercera aleación hay 8 kg de zinc, 6 kg de cobre y 6 kg de plomo. ¿Cuántos kilogramos de cada aleación tendrán que combinarse para obtener una aleación que por cada 34 kg de zinc, contenga 17 kg de cobre y 19 kg de plomo?

3. Supongamos que te ofrecen dos trabajos diferentes para vender material a dentistas. Una compañía te ofrece una comisión simple del 6% sobre ventas; la otra compañía te ofrece un salario de $250 por semana más 3% sobre ventas. ¿Cuánto tendrías qué vender en una semana para que la comisión simple sea mejor?

4. Un avión que vuela con viento de frente recorre los 1,800 kilómetros entre dos ciudades, en 3 horas 36 minutos; en el vuelo de regreso, recorre la misma distancia en 3 horas. Halla la velocidad del avión y la velocidad del viento, suponiendo que ambas permanecen constantes.

5. Se obtienen 10 litros de una solución ácida al 30%, al mezclar una solución al 20% con otra al 50%. ¿Cuánto se usó de cada una?

6. Un rectángulo tiene 92 cm de perímetro y su diagonal mide 34 cm. Halla sus lados.

7. La hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 19.5 m. Si la longitud de cada cateto aumentara 4.5 m, la hipotenusa aumentaría 6 m. Halla los catetos del triángulo primitivo.

8. Un jardín de flores rectangular tiene 504 cm^2 de área y está rodeado por un camino de 3 m de ancho. El área del camino es 312 m^2. Halla las dimensiones (longitud y anchura) del jardín.

9. Una pieza rectangular de cartón tiene 120 cm^2 de área. Al cortar un cuadrado de 2 cm de lado en cada una de las esquinas y doblar los lados hacia arriba, se forma una caja abierta de 96 cm^3 de volumen. Halla las dimensiones (largo y ancho) del cartón inicial.

10. Un alambre de 120 cm de largo se dobla en forma de triángulo rectángulo cuya hipotenusa mide 51 cm. Encuentra la longitud de cada cateto del triángulo.

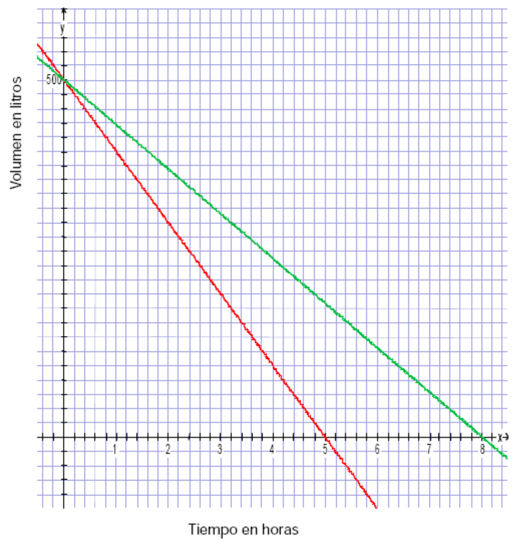
11. Dos hombres parten de un punto y caminan formando un ángulo recto. La velocidad de uno es 1 km por hora mayor que la del otro. Después de una hora, la distancia entre ellos es de 5 km. Encuentra la velocidad de cada hombre.

12. En la terminal de autobuses, los pasajeros pueden contratar una de dos compañías de taxis. La compañía “A” cobra \$5 por cada kilómetro recorrido, sin costo por el banderazo. La compañía “B” cobra \$82 por el banderazo y \$2 por cada kilómetro recorrido.
    a) Escribe, para cada compañía, la ecuación que da el costo de un viaje en función de los kilómetros recorridos.
    b) Traza, sobre los mismos ejes, las gráficas de las ecuaciones anteriores, identifícalas claramente.
    c) Calcula el costo de un viaje con los recorridos siguientes:

Recorrido en Kilómet	Compañía ‘ Costo en pe	Compañía ‘ Costo en pe
7		
13		
22		
29		
35		

    d) En general, ¿en qué compañía conviene contratar un taxi?

13. Dos tinacos del mismo volumen se vacían uniformemente, mediante llaves de diferente tamaño, de tal manera que uno de ellos queda vacío en 5 horas en tanto que el otro requiere de 8 horas.



    a) ¿Cuál es la gráfica y la ecuación que corresponde a cada tinaco? Explica con palabras lo que representa cada una de ellas.
    b) ¿Cuál es la pendiente de cada una? Explica el significado de la pendiente en términos de la situación.
    c) ¿En qué instante tiene uno de los tinacos el doble de agua que el otro?

PROBLEMAS EXTRAS

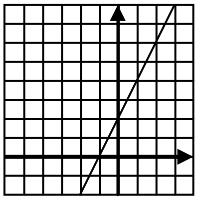
1. Rectas y sus ecuaciones

(1) ¿Cuál es de cuál?

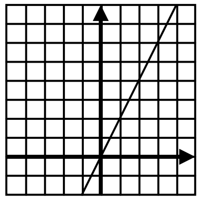
Relaciona las siguientes ecuaciones con su gráfica correspondiente y traza la gráfica de las restantes.

a) $y = x$
b) $y = -x$
c) $y = x + 2$
d) $y = -2x + 2$
e) $y = 2x – 2$
f) $y = 2x$
g) $y = -x – 2$
h) $y = 2x + 2$
i) $y = -2x$
j) $y = \frac{1}{2}x$
k) $y = -\frac{1}{2}x$
l) $y = -x + 2$
m) y = -2x – 2
n) $y = -\frac{1}{2}x + 2$

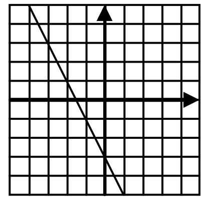
[ ]



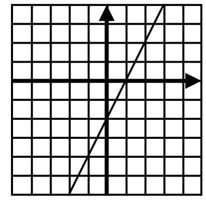
[ ]



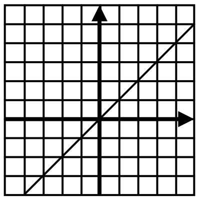
[ ]



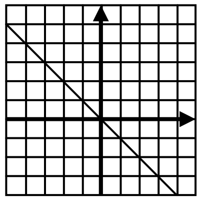
[ ]



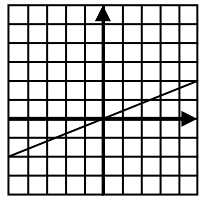
[ ]



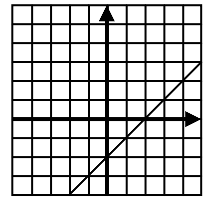
[ ]



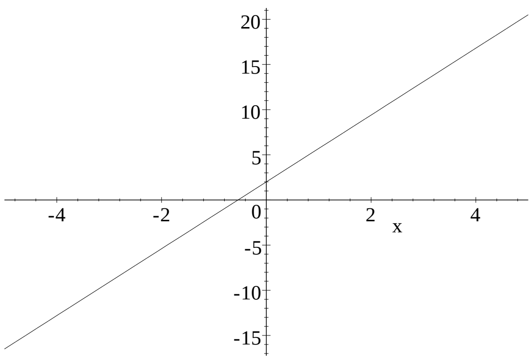
[ ]

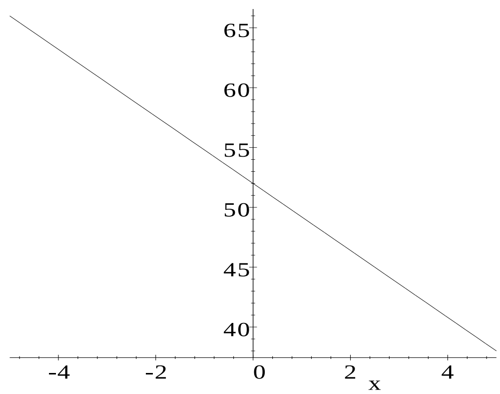


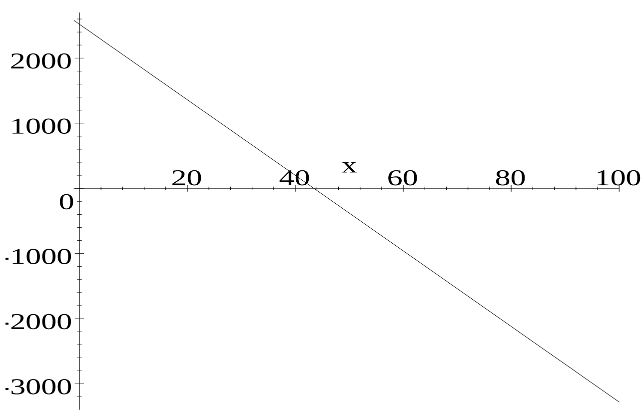
[ ]

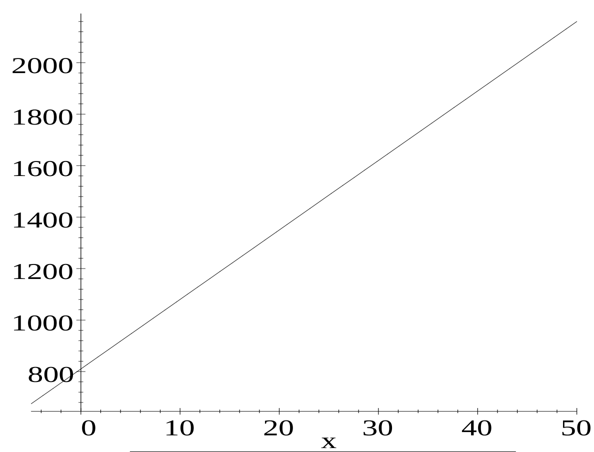


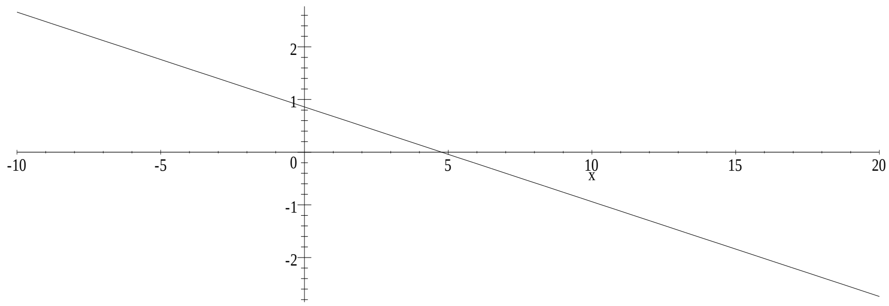
(2) Encuentra la ecuación de las siguientes rectas:











(3) Un sencillo baile

Los alumnos del último semestre están organizando un baile de bienvenida a los alumnos de nuevo ingreso. Decidieron contratar a dos grupos de rock y las condiciones de pago que imponen los grupos son:

El primer grupo cobra 3 000 pesos más el 40% de lo recaudado por las entradas mientras que el segundo grupo cobra 6 450 pesos más el 10% de lo recaudado por las entradas.

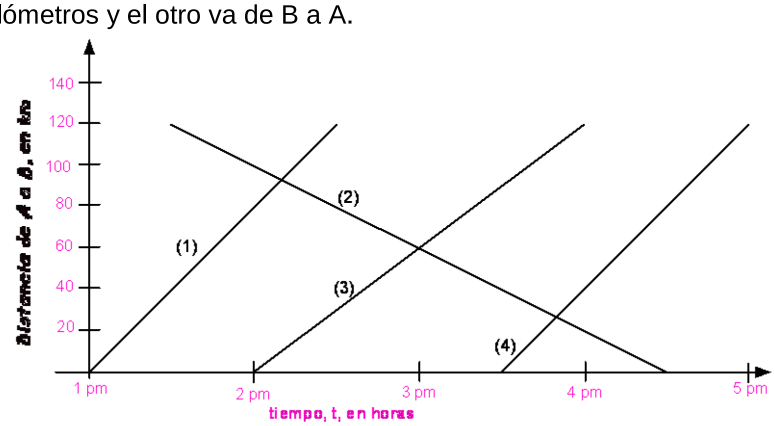
Pero no hay acuerdo entre los organizadores: se establece una ardua discusión entre ellos porque algunos piensan que el segundo grupo cobrará más que el primero, otros (partidarios del primer grupo) le piden que argumenten irrefutablemente su posición (es decir, usando matemáticas).
Los partidarios del primer grupo piensan que lo que deben hacer es manipular el precio de las entradas de tal forma que el primer grupo gane más que el segundo. ¿Cuánto es lo menos que tienen que cobrar por persona para que eso se cumpla si estiman que habrá 500 personas que paguen su entrada?

Por otro lado, independientemente de quién gane más que quién, también se enfrentan a otra cuestión: deben poder pagarle a los dos grupos con el dinero que se recaude de las entradas ¿Cuánto es lo menos que deben cobrar por persona para que con las entradas alcancen a pagarle a los dos grupos? ¿Cuál es el grupo que cobraría más, finalmente?

Viajes y viajeros

Los cuatro trenes

La gráfica representa los viajes de cuatro trenes, tres de ellos van de A a B, separados por una distancia de 120 kilómetros y el otro va de B a A.



a) ¿Qué trenes viajan a la misma velocidad? ¿Cuál es esta velocidad?
b) ¿Cuál es el tren que viaja más lentamente? ¿Con qué velocidad viaja?
c) El tren (2) debería viajar a 50 km/h, ¿con cuántos minutos de retraso llegó a A?

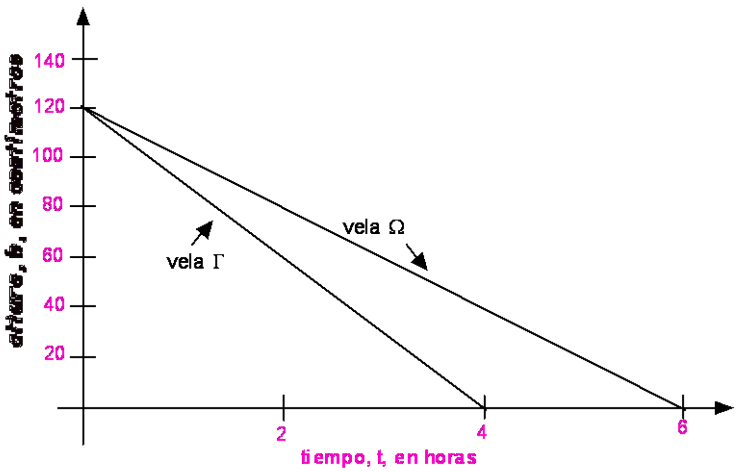
Telmex y AT&T

En un internado de estudiantes, cada estudiante puede contratar una de dos compañías. Telmex cobra $87.5 por mes, más 80 centavos por llamada. AT&T cobra $82 por mes, más 90 centavos por llamada.

(1) Cuántas llamadas hace aproximadamente por mes?
(2) Escribe, para cada compañía, la ecuación que representa el costo de un mes dado en función del número de llamadas.
(3) Grafica cada una de las ecuaciones que escribiste en el inciso (b). Asegúrate de identificarlas (ya sea con colores distintos o con un letrero).
(4) Discute cómo se relacionan tus dos graficas con la solución del problema. ¿Cuándo cobran lo mismo ambas compañías? ¿Cuándo conviene más Telmex? ¿Cuándo AT&T?
(5) ¿Cuántas llamadas piensas que hace el estudiante promedio de tu clase?
(6) ¿Cómo puedes averiguar la respuesta al inciso (e)?
(7) Lleva a cabo el plan que hiciste en el inciso (f).
(8) Decide cuáles estudiantes de tu grupo contratarían cada compañía y explica por qué.
(9) Aplica el modelo PER (Propósito, Estrategia, Resultado).

Las velas

Dos velas del mismo largo están hechas de materiales distintos, tales que una de ellas se consume uniformemente hasta terminarse en cuatro horas en tanto que la otra se consume en seis horas.



Cuestionario
(1) ¿Cuál es la ecuación de la recta correspondiente a cada vela? Da una explicación con palabras de lo que representa cada una de ellas.
(2) ¿Cuál es la pendiente de cada una? Explica el significado de cada pendiente en términos de la situación.
(3) ¿A qué hora se deben encender ambas velas simultáneamente para que a las 5:00 PM un cabo de vela mida el doble que el otro?
(4) Considera ahora la longitud de la vela consumida en lugar de su altura. Traza las gráficas, haz una comparación con las anteriores y explica cómo pueden ambos pares de gráficas representar la misma situación.
(5) ¿A qué hora se deben encender ambas velas simultáneamente para que a las 5:00 PM un cabo de vela mida el triple que el otro?
(6) ¿A qué hora se deben encender ambas velas simultáneamente para que a las 5:00 PM un cabo de vela mida n veces el otro? ¿Puede n tomar cualquier valor?
(7) Inventa, redacta y resuelve un problema que se pueda representar con el mismo modelo matemático.
(8) Aplica el modelo PER (Propósito, Estrategia, Resultado) con respecto al aprendizaje que lograste en esta actividad.

BIBLIOGRAFÍA.

Algebra con aplicaciones
Phillips, Elizabeth P. y Butts, Thomas y Shaughnessy, Michael
Editorial OXFORD
Edición 2005

Álgebra, Libro del Estudiante
Academia Institucional de Matemáticas
Editorial IPN
1era Edición, 2005.

PÁGINAS WEB DE CONSULTA.

Ecuaciones
http://www.vitutor.net/1/10.html

Sistema de ecuaciones
http://www.vitutor.net/1/36.html

Ecuaciones y Sistemas
http://www.aulamatematica.com/BC1/01_Reales/Reales_index01.htm

Ecuaciones de primer grado. Resolución de problemas.
http://recursostic.educacion.es/descartes/web/materiales_didacticos/Ecuaciones_primer_grado_resolucion_problemas/index.htm

Funciones. La función de proporcionalidad
http://recursostic.educacion.es/descartes/web/materiales_didacticos/Funciones_funcion_de_proporcionalidad/index.htm

Interpretación de expresiones algebraicas
http://recursostic.educacion.es/descartes/web/materiales_didacticos/Interpretacion_expresiones_algebraicas_d3/indice.htm

UNIDAD IV. FUNCIONES Y ECUACIONES CUADRÁTICAS.

COMPETENCIA PARTICULAR DE LA UNIDAD:
Emplea las funciones y ecuaciones cuadráticas en la solución de problemas que se presentan en situaciones de su entorno académico, personal y social.

RAP 1.
Identifica elementos de las funciones cuadráticas a partir de representaciones tabulares, graficas y algebraicas en su ámbito académica, personal y social.

FORMA NORMAL DE UNA ECUACION CUADRATICA

$ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$

¿Cómo podemos resolver una ecuación como $x^2 + 4x + 2 = 0$?

Solución
Si pudiésemos escribir esta ecuación en la forma $(\text{cantidad})^2$ = número
Entonces podríamos resolverla hallando las raíces cuadradas del número.
$x^2 + 4x + 2 = 0$ Ecuación 1

¿Qué podemos hacer para transformar el miembro del lado izquierdo de la ecuación 1 en un trinomio cuadrado perfecto?

Los trinomios cuadrados perfectos son de la forma $x^2 + 2ax + a^2$. Se factorizan en un binomio al cuadrado:
$x^2 \pm 2ax + a^2 = (x \pm a)^2$
Si sumamos 2 en ambos miembros de la ecuación 1, entonces obtenemos
$x^2 + 4x + 2 + 2 = 2$
$x^2 + 4x + 4 = 2$
Por lo tanto:
$(x + 2)^2 = 2$
De este modo:
$(x + 2) = \pm\sqrt{2}$
$x = -2 + \sqrt{2}$ o bien $x = -2 - \sqrt{2}$

Podemos obtener aproximaciones numéricas para estas soluciones si utilizamos $\sqrt{2} = 1.41$:
$X = -2 + 1.41$ o bien $x= -2 - 1.41$
$x=-0.59$ o bien $x = -3.41$
Este procedimiento para hallar solución se llama completar el cuadrado.

EJEMPLO
Sumar la constante apropiada para formar un trinomio cuadrado perfecto.

a) $x^2 + 6x +$ ___
b) $x^2 - 8x +$ ___
c) $x^2 + 9x +$ ___

Soluciones

a) $x^2 + 6x +$ ___
Deseamos obtener la forma de $x^2 + 2ax + a^2$.
$x^2 + 6x +$___ $= x^2 + 2(3x)+$ ____
Así $a = 3 \rightarrow a^2 = 9$.
$x^2 + 6x + 9$
Eso es igual a $(x + 3)^2$

Nótese que el coeficiente del término medio (6) era el doble de los que necesitábamos elevar el cuadrado (3). Por lo tanto para completar el cuadrado solamente necesitábamos tomar 1/2 del coeficiente del término x, elevarlo al cuadrado y sumarlo. Por ejemplo.

$x^2 + 6x +$ ___$= x^2 + 6x + 9$

b) $x^2 - 8x$ ___ =
$x^2 - 2(4x) +$ ____
$x^2 - 8x + 16$

c) $x^2 + 9x +$ _____

$$x^2 + 2\left(\frac{9}{2}x\right) + \_\_\_ =$$

$$x^2 + 2\left(\frac{9}{2}x\right) + \left(\frac{9}{2}\right)^2 =$$

$$x^2 + 9x + \frac{81}{4}$$

PROCEDIMIENTO PARA COMPLETAR EL CUADRADO

Para hacer $x^2 + bx + c$ un cuadrado perfecto, sume $(b/2)^2$. De este modo $x^2 + bx + (b/2)^2$

EJEMPLO
Utilizar el método de completar el cuadrado para resolver las siguientes ecuaciones cuadráticas.

a. $x^2 + 7x + 4 = 0$
b. $x^2 - 6x + 8 = 0$
c. $4x^2 + 8x - 1 = 0$

Donde a, b y c son los coeficientes de la ecuación cuadrática. En la ecuación $3x^2 + 4x — 2 = 0$, a = 3, b = 4, c = -2. Para obtener una fórmula que rápidamente produzca las soluciones de una ecuación cuadrática, completaremos el cuadrado utilizando los coeficientes en la forma general de la ecuación anterior.

EJEMPLO
Hallar las soluciones de la ecuación
$ax^2 + bx + c = 0$ a, b y c son números reales; a = 0.
Solución
Supondremos que **a** es positivo. Si no lo fuese, podríamos multiplicar ambos lados por -1 y hacerlo positivo.

$ax^2 + bx + c = 0$
$ax^2 + bx = -c$
dividiendo entre a:

$$\frac{ax^2}{a} + \frac{bx}{a} = \frac{-c}{a}$$

$$x^2 + \frac{bx}{a} = -\frac{c}{a}$$

El término lineal es $\frac{b}{a}$, por lo que se agrega a ambos lados de la igual $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$

$$x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{b^2}{4a^2} = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}$$

Factorizando el trinomio:

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$$

Sumando $\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$:

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$$

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)=\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$$

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{\sqrt{4a^2}}$$

$$x+\frac{b}{2a}=\frac{\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$x=-\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

De este modo las soluciones a cualquier ecuación cuadrática de la forma
$ax^2 + bx + c == 0$, $a \neq 0$ pueden ser obtenidas escribiendo valores de los coeficientes en la fórmula

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Esta fórmula se llama la fórmula cuadrática.

LA FÓRMULA CUADRÁTICA

Las soluciones a una ecuación de la forma $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) son:

$$x=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \qquad x=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

EJEMPLO

Utilizar la fórmula cuadrática para resolver las siguientes ecuaciones cuadráticas.

a. $3x^2 - 4x = 17$
b. $2x^2 = 13x + 7$
c. $3x^2 + 3 = (2x + 1)^2 + 4$

Soluciones:

Antes de poder utilizar la fórmula cuadrática, cada ecuación debe estar escrita en la forma normal $ax^2 + bx + c = 0$.

a.-
$3x^2 - 4x = 17$, así $3x^2 - 4x - 17 = 0$ es la forma normal.
Aquí, $a = 3$, $b = -4$, y $c = -17$. De este modo:

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-(-4)\pm\sqrt{(-4)^2-4(3)(-17)}}{2\cdot 3}=\frac{4\pm\sqrt{16+204}}{6}=\frac{4\pm\sqrt{220}}{6}$$

Si se desean estimaciones numéricas, $\sqrt{220} = 14.83$; así

$$x\approx\frac{4\pm 14.83}{6}=\frac{18.83}{6} \quad \text{o bien} \quad \frac{-10.83}{6}$$

Por lo tanto

$$x\approx 3.14 \quad o\ bien \quad x\approx -1.81$$

b.-
$2x^2 = 13x + 7$, así $2x^2 - 13x - 7 = 0$, donde $a = 2$, $b = -13$, y $c = -7$

$$x=\frac{-(-13)\pm\sqrt{(-13)^2-4(2)(-7)}}{2\cdot 2}=\frac{13\pm\sqrt{169+56}}{4}=\frac{13\pm\sqrt{225}}{4}=\frac{13\pm 15}{4}$$

Por lo tanto:

$$x \approx \frac{13+15}{4} \quad o\ bien \quad x = \frac{13-15}{4}$$
$$x \approx \frac{28}{4} = 7 \quad o\ bien \quad x = \frac{-2}{4} = \frac{-1}{2}$$

c.-
Expresemos la ecuación de la forma $ax^2 + bx + c = 0$.
$3x^2 + 3 = (2x + 1)^2 + 4$
$3x^2 + 3 = 4x^2 + 4x + 1 + 4$
$0 = x^2 + 4x + 2$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{(4)^2 - 4(1)(2)}}{2 \cdot 1} = \frac{-4 \pm \sqrt{16-8}}{2} = \frac{-43 \pm \sqrt{8}}{2} = \frac{13 \pm 15}{4}$$
$$x = \frac{-4 \pm 2\sqrt{2}}{2} = \frac{2(-2 \pm \sqrt{2})}{2}$$
$$x = -2 + \sqrt{2} \quad \text{o bien} \quad x = -2 - \sqrt{2}\ .$$

LA UNIDAD IMAGINARIA
Si hacemos que ***i*** sea EL numero tal que $i^2 = -1$, entonces $i = \sqrt{-1}$

LA RAÍZ CUADRADA DE UN NÚMERO REAL NEGATIVO
Supongamos que a > 0. Entonces $\sqrt{-a} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{-1} = \sqrt{a}i$

COMPLEJOS
El conjunto de números de la forma a + b***i*** donde **a** y **b** son números reales e ***i***=$\sqrt{-1}$, se llama el conjunto de números complejos.

EJEMPLO

Resolver las siguientes ecuaciones.
a. $x^2 + 9 = 0$
b. $2 + 3x^2 = 0$
c. $x^2 = -28$

Solución
a.
$x^2 + 9 = 0$
$x^2 = -9$
$$x = \pm\sqrt{-9} = \pm\sqrt{9} \cdot \sqrt{-1} = \pm 3i$$

b.
$2 + 3x^2 = 0$
$3x^2 = -2$
$$x^2 = \frac{-2}{3}$$
$$x = \pm\sqrt{-\frac{-2}{3}} = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}i$$
La aproximación numérica para $\sqrt{2/3}$ puede ser obtenida si se desea. Si utilizamos 2/3 =0.667, entonces $\sqrt{2/3}$ =0.817, así x =0.817i Son formas decimales de las soluciones complejas.

c.
$x^2 = -28$,
Así
$$x = \pm\sqrt{-28} = \pm\sqrt{28}i$$

IMPLICACIONES DEL DISCRIMINANTE

La cantidad b^2 - 4ac se llama el discriminante para la ecuación cuadrática ax^2 +bx + c - 0, a=0. 1. Si b^2 - 4ac > 0, la ecuación tiene dos soluciones reales. 2. Si b^2- 4ac= 0, la ecuación tiene dos soluciones reales. 3. Si b^2- 4ac < 0, la ecuación tiene dos soluciones no reales complejas.

EJEMPLO
Clasificar las soluciones de cada una de estas ecuaciones.

a. $3x^2 - 7x + 5 = 0$
b. $0.07x^2 - 0.6x = -0.2$
c. $7 = \frac{1}{x^2} - \frac{3}{x}, x = 0$
d. $x^4 - 4x^2 - 5 = 0$

Soluciones
a.
$3x^2 - 7x + 5 = 0$
$b^2 - 4ac = (-7)^2 - 4(3)(5) = 49 - 60 < 0$
Esta cuadrática tiene dos soluciones no reales complejas.

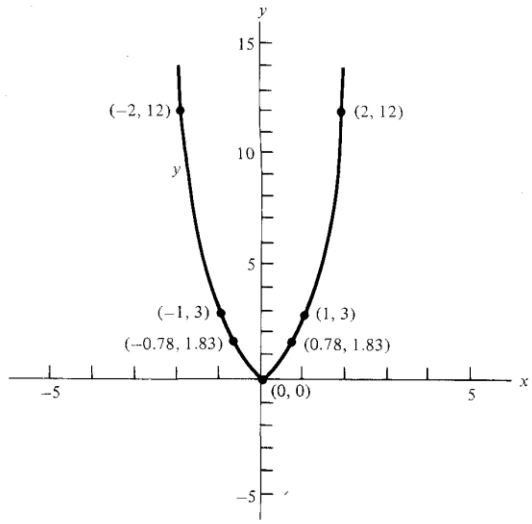
b.
$0.07x^2 - 0.6 = -0.2$
$0.07x^2 - 0.6x + 0.2 = 0$
$b^2 - 4ac = (-0.6)^2 - 4(0.07)(0.2) = 0.36 - 0.056 > 0$
Esta cuadrática tiene dos soluciones reales.
c.
$7 = \frac{1}{x^2} - \frac{3}{x}$
$7x^2 = 1 - 3x$
$7x^2 + 3x - 1 = 0$
$b^2 - 4ac = (3)^2 - 4(7)(-l)> 0$
Esta ecuación es equivalente a una cuadrática con dos soluciones reales.

d.
$x^4- 4x^2 -5 = 0$ Ecuación 1
Esta ecuación es una ecuación polinomial de cuarto grado, pero no tiene término x^3 o bien x. En algunos casos especiales, podemos hallar todas las soluciones a la ecuación.
$0= x^4 - 4x^2 - 5 = (x^2 - 5)(x^2 + 1)$
Entonces:
$x^2 - 5 = 0$ o bien $x^2 + 1 = 0$
$x^2 = 5$ o bien $x^2 = -1$
$x = \pm\sqrt{5}$ o bien $x = \pm i$
Por lo tanto hay cuatro soluciones a la Ecuación 1, $x = \sqrt{5}, -\sqrt{5}, i, -i$, dos soluciones reales y dos soluciones no reales complejas.

EJEMPLO
Graficar la siguiente ecuación.
$y = 3x^2$

Solución
Hacemos una tabla, luego localizamos algunos puntos para estimar la gráfica.

x	$y = 3x^2$
0	0
1	3
−1	3
2	12
−2	12
0.78	1.83
−0.78	1.83

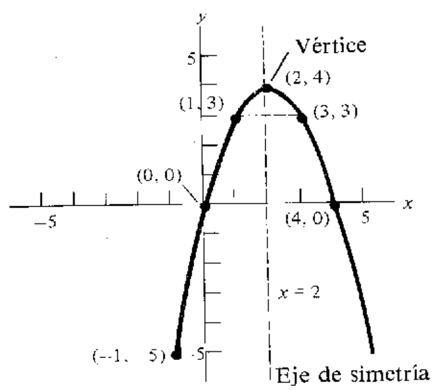


El valor mínimo (punto bajo) de esta gráfica ocurre cuando *x* = 0. Las coordenadas del punto bajo son (0,0). Esta gráfica es un ejemplo de **una parábola.** El punto bajo se llama vértice de la parábola. Decimos que esta *gráfica* es **simétrica respecto al eje** *y,* porque los puntos sobre la gráfica con el mismo valor *y,* como (1, 3) y (—1, 3) son "imágenes" especulares uno de otro cuando la gráfica se compara respecto del eje *y.* A los puntos (1, 3) y (-1,3) les llamaremos **puntos simétricos.** La coordenada *x* del vértice, en este caso *x* = 0, está *exactamente a la mitad* entre las coordenadas *x* de las parejas de puntos simétricos. Por ejemplo, x = 0 está a la mitad entre x = 1 y x = -1 en la grafica. El eje *y* (la recta x = 0) se llama el **eje de simetría** para esta parábola. En las parábolas estudiaremos que la *recta vertical a través del vértice de la parábola es el eje de simetría* para la parábola.

EJEMPLO
Trazar la gráfica de $y = 4x - x^2$.

Solución
Se hallan las coordenadas de varios puntos. Localícelos y trace la gráfica. Nótese que esta parábola tiene un valor *máximo,* un punto alto. Su vértice ocurre en el punto (2, 4). El eje de simetría es la recta *x* = 2.

x	y
0	0
1	3
2	4
−1	−5
3	3
4	0



GRÁFICAS DE ECUACIONES CUADRÁTICAS

La gráfica de una ecuación de la forma $y = ax^2 + bx + c$, a=0 es una parábola. El vértice ocurre cuando, $x = -\frac{b}{2a}$. el eje de simetría es la recta vertical a través del vértice, $x = -\frac{b}{2a}$. Cuando a>0. la gráfica tiene un mínimo, un punto bajo (flexiona hacia arriba). Cuando a<0 la gráfica tiene un máximo, punto alto (flexiona hacia abajo).

EJEMPLO

a. Hallar el vértice de la parábola $y = -3x^2 - 6x + 8$ y dibuje su gráfica.
b. Determinar las coordenadas de las intercepciones con el eje *x.*

Soluciones

a.

El siguiente esquema nos ayudará ahora a obtener rápidamente la gráfica de cualquier parábola:

1. Se hallan las coordenadas del vértice y se localizan en el diagrama.
2. Se halla y localiza una pareja de puntos simétricos convenientes.
3. Se halla y localiza una segunda pareja de puntos simétricos como comprobación de la gráfica.

1. Para esta parábola $a = -3$ y $b = -6$. De este modo el vértice ocurre cuando

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-6)}{2(-3)} = \frac{6}{-6} = -1$$

Para hallar la coordenada *y* del vértice, sustituimos $x = -1$ en la ecuación:

$y = -3(-l)^2 - 6(-l) + 8 = -3 + 6 + 8 = 11$

Por lo tanto el vértice de esta parábola ocurre en el punto (—1, 11).

2. Para hallar una pareja de puntos simétricos sobre la gráfica, podemos mover *x* la misma distancia a la izquierda y a la derecha de nuestro vértice y sustituir en la ecuación. Recorramos el valor de *x* = — 1, una unidad a la izquierda y una a la derecha, ax= -2y x = 0.

Si $x = 0$, entonces $= -3(0)^2 - 6(0) + 8 = 8$.

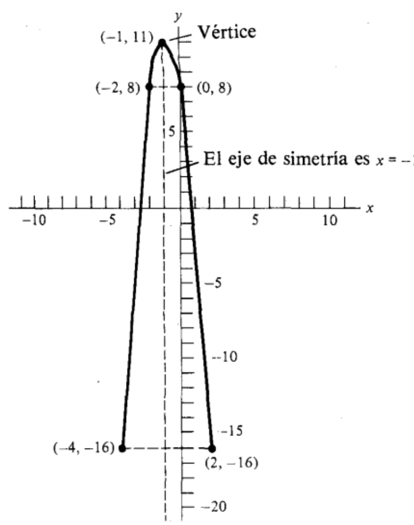
Si $x = -2$, entonces$= -3(-2)^2 - 6(-2) + 8 = 8$.

3. Para determinar una segunda pareja de puntos simétricos para comprobar la gráfica nos movemos un poco más *allá* del vértice, digamos 3 unidades a cada lado, a *x*= -4 y *x* = 2.

Si $x = 2$, entonces $y = -3(2)^2 - 6(2) + 8 = -16$.

Si *x* = —4, entonces *y* = —16.

Estos cinco puntos, el vértice y dos parejas de puntos simétricos nos permitirán graficar la parábola.



Nótese que la parábola tiene un punto alto (a = - 3 <0). Esta parábola intercepta el eje *x* en dos sitios.

PROCEDIMIENTO PARA GRAFICAR UNA PARÁBOLA

Para trazar la gráfica de $y = ax^2 + bx + c$,

1. Halle y localice el vértice [ocurre cuando $x = -\frac{b}{2a}$
2. Halle y localice una pareja de puntos simétricos convenientes.
3. Halle y localice otra pareja de puntos simétricos para "comprobar".

EJEMPLO

Trazar la gráfica de la parábola
$y = x^2 + x + 2$

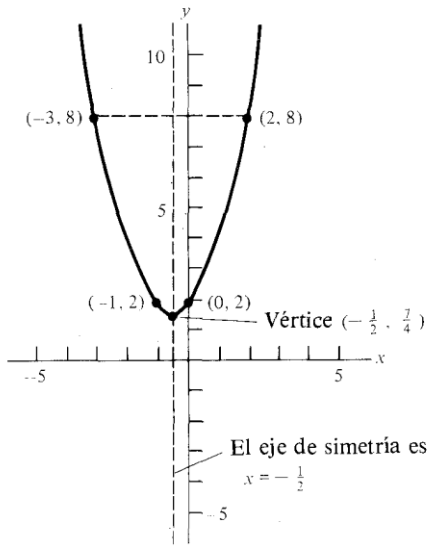
Solución

1. El vértice ocurre cuando $x = -\frac{b}{2a}$ = -1/2.

si $x = \frac{-1}{2}$, entonces $y = \left(\frac{-1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} + 2 = \frac{7}{4}$

2. Hallamos una pareja de puntos simétricos recorriendo 1/2 unidad a cada lado del vértice en *x* = - 1/2 (porque nos dará números fáciles para trabajar).
Si $x = 0$, entonces $y = (0)^2 + 0 + 2 = 2$.
Si $x = -1$, entonces $y = 2$ también.

3. Para puntos de comprobación, supóngase que nos movemos 5/2 unidades (lo cual es conveniente).
Si $x = -\frac{1}{2} - \frac{5}{2} = -3$, entonces $y = 8$ también.



EJEMPLO

¿En qué condiciones la gráfica de $y = ax^2 + bx + c$ cortará el eje *x?*

Solución

Ciertamente, no todas las parábolas cortan el eje *x*. Si la gráfica corta el eje *x* lo hará cuando *y* = 0. Así en general, debemos resolver la ecuación.

$0 = ax^2 + bx + c$ Ecuación 1

Para hallar las intercepciones con el eje *x, si* existen. Recuérdese que las soluciones a la ecuación 1 están dadas por la fórmula cuadrática. De este modo las intercepciones *x* para una parábola son

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

- Si $b^2 - 4ac > 0$, las soluciones son números reales y la parábola corta el eje *x*.
- Por otro lado, si $b^2 - 4ac < 0$, las soluciones son números complejos y entonces no hay intercepciones con el eje *x* para la parábola.

RAP 2.
Elabora modelos que den lugar a ecuaciones cuadráticas a partir de situaciones de la vida cotidiana y las ciencias.

EJEMPLO
Suponer que la altura h (en pies) de una pelota de golf lanzada desde un montículo elevado está dada por h = $80t - 16t^2 + 20$ después de t segundos. ¿Cuánto tiempo tardará la pelota en tocar el suelo?

Solución
La pelota está en el suelo cuando la altura h = 0. Por lo tanto, debemos resolver la ecuación cuadrática:
$0 = 80t - 16t^2 + 20$
o bien
$0 = 16t^2 - 80t - 20$

$$t = \frac{-(-80) \pm \sqrt{(-80)^2 - 4(16)(-20)}}{2 \cdot 16} = \frac{80 \pm \sqrt{6400 + 1280}}{32} = \frac{80 \pm \sqrt{7680}}{32} = \frac{80 \pm 87.64}{32}$$

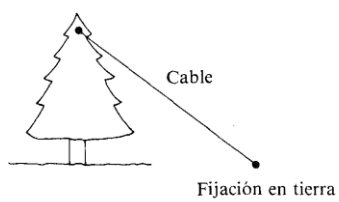
$$t = \frac{80 + 87.64}{32} \quad o\ bien \quad t = \frac{80 - 87.64}{32}$$

$$t = 5.239 \quad o\ bien \quad t = -0.239$$

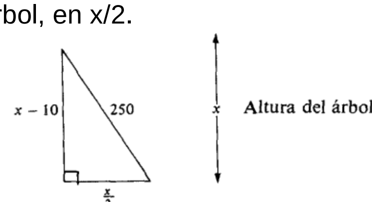
EJEMPLO

Cuál es la altura del árbol más alto que puede usted sujetar con un cable de 250 pies? El cable debe fijarse al suelo a una distancia de la base del árbol que sea al menos la mitad de la altura del árbol. El cable debe estar atado al árbol por lo menos 10 pies abajo de su copa.

Solución:
Estamos buscando la altura del árbol. Sea x la altura del árbol.



Podemos atar el cable a 10 pies de su copa, en x - 10 (pies). Debemos sujetarlo al suelo por lo menos a una distancia de la mitad de la altura del árbol, en x/2.



De este modo podemos imaginar la situación en la figura anterior. El cable es la hipotenusa de un triángulo rectángulo. Si utilizamos la relación pitagórica para los lados de un triángulo rectángulo, obtenemos

$$(x - 10)^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2 = (250)^2$$

$$x^2 - 20x + 100 + \frac{x^2}{4} = 62500$$

$$\frac{5x^2}{4} - 20x + 100 = 62500$$

$1.25x^2 - 20x - 62\,400 = 0$

$$x = \frac{-(-20) \pm \sqrt{(-20)^2 - 4(1.25)(-62400)}}{2 \cdot 1.25} = \frac{20 \pm \sqrt{400 + 312000}}{2.5} = \frac{20 \pm \sqrt{312400}}{2.5} = \frac{20 \pm 558.93}{2.5}$$

$$x \approx \frac{20 + 558.93}{2.5} \quad o\ bien \quad x = \frac{20 - 558.93}{2.5}$$
$$x \approx 231.57\ pies$$

EJEMPLO

Supongamos que usted se tardó 20 minutos más en manejar a 25 millas del trabajo a la casa que de ésta al trabajo. Usted estima que hizo un promedio de 10 mph menos en su camino a casa. ¿Qué tan rápido manejó en cada recorrido?

Solución:
Una relación esencial que nos dan en el problema es tiempo para regresar a casa = tiempo para viajar al trabajo + 20 minutos
Si V representa la velocidad promedio al trabajo; entonces V - 10 representa la velocidad promedio de regreso a casa. Necesitamos este modelo:
Distancia = Velocidad x tiempo
D = Vt

	Distancia	*Velocidad*	*Tiempo* $= \frac{Distancia}{Velocidad}$
Al trabajo	25	V	$\frac{25}{V}$
De regreso a casa	25	$V - 10$	$\frac{25}{V - 10}$

Utilizando los valores para el tiempo en la Tabla y la relación tiempo para regresar a casa = tiempo para viajar al trabajo + 20 minutos obtenemos.

$$\frac{25}{v-10} = \frac{25}{v} + \frac{1}{3}$$

Tiempo de regreso = tiempo al trabajo + un tercio de hora (20 minutos)

$$3V(V-10)\frac{25}{v-10} = 3V(V-10)\left[\frac{25}{v} + \frac{1}{3}\right]$$

75V = 75(V - 10) + V{V - 10)
75V = 75V - 750 + V^2 - 10V
0 = V^2 - 10V – 750

$$V = \frac{-(-10) \pm \sqrt{(-10)^2 - 4(1)(-750)}}{2 \cdot 1} = \frac{10 \pm \sqrt{3100}}{2} = \frac{10 \pm 55.68}{2}$$

$$V = 32.84$$

$$V - 10 = 22.84$$

De nuevo se omite la solución negativa ya que la velocidad es una cantidad positiva

EJEMPLO
La altura h sobre el suelo de una pelota de golf depende del tiempo t que ha estado en vuelo. Un tiro desde un soporte elevado tiene una altura aproximadamente dada por h = 80t - 16t^2 + 20
donde h está en pies y t en segundos.
a. Graficar la relación entre h y t y hallar la altura máxima de la pelota de golf.
b. ¿Cuánto tiempo estará en vuelo la pelota?

Soluciones
a.
Utilizamos el procedimiento de tres pasos.
1. El vértice ocurre en

$$t = \frac{-80}{2(-16)} = \frac{5}{2}$$

Cuando t = 5/2,

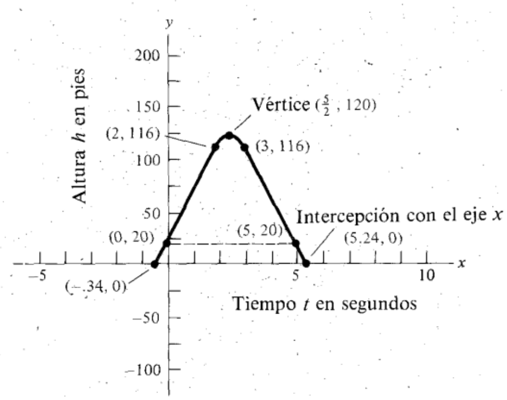
$h = 80\left(\frac{5}{2}\right) - 16\left(\frac{5}{2}\right)^2 + 20 = 120$

El vértice es el punto (5/2, 120).

2. Aquí está una pareja de puntos simétricos:
Si t = 2, entonces h = 116.
Si t = 3, entonces h = 116.

3. Una pareja de puntos simétricos para comprobar:
Cuando t = 0 y t = .5, h = 20
b. Para hallar cuando toca el suelo la pelota, hacemos h = 0 y resolvemos:
0 = 80t - 16t2 + 20
t = 5.24   o bien t = -0.24segundo

Las intercepciones t de la gráfica son entonces (5.24, 0) y (-0.24, 0).



EJEMPLO
Suponer que el costo de manufactura C en dólares por hacer x mochilas en un día está dado por:
C = x^2 - 12x + 50
a. Graficar esta función de costo.
b. ¿Cuál es el costo mínimo y cuántas mochilas se producen al día?
c. ¿Cuesta más hacer 4 mochilas que hacer 10?
d. ¿Cuantas mochilas pueden hacerse por $40?

Solución
a. La gráfica será una parábola que se flexiona hacia arriba, ya que a = 1 > 0. Desarrollamos el procedimiento de tres pasos.

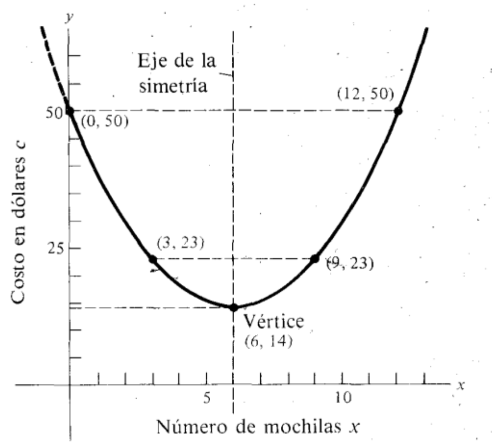
1. El vértice se encuentra en

$x = \frac{-(-12)}{2} = 6$

Sustituyendo en la ecuación, hallamos que cuando x = 6, C = $14. El vértice es (6,14).

2. Tenemos una pareja de puntos simétricos:
Si x = 3, entonces C = $23.
Si x = 9, entonces C = $23.

3. Tenemos una pareja de puntos simétricos para comprobar:
Si x = 0, entonces C = $50.
Si x = 1, entonces C = $50.



La gráfica indica que el costo de manufactura puede ser minimizado. Si el fabricante hace muy pocas o demasiadas mochilas al día, le costará más, tal vez debido a pérdida de ventas en el primer caso y mano de obra excedente y costos de inventario en el segundo

b. El costo mínimo ocurre en el vértice, porque ahí es donde ocurre el valor de costo más bajo en la gráfica. Por lo tanto, el costo mínimo es $14 y el número de mochilas hechas por $14 es 6.

c. De la gráfica se ve que el costo para 10 mochilas es mayor que el de 4. Sustituyamos en
x = 10 y x = 4 para estar seguros:

Si x = 4, entonces C = $(4)^2$ - (12 • 4) + 50 = 16 - 48 + 50 = $18. Si x= 10, entonces C = $(10)^2$ - (12 • 10) + 50 = 100 - 120 + 50 = $30.

Por lo tanto el costo es mayor para 10 mochilas.

d. Esta pregunta nos da un valor de C, $40, por lo que despejamos x, el número de mochilas.
Si C = 40, entonces 40 = x^2 - 12x + 50.
Obtenemos una ecuación cuadrática, utilizando la fórmula cuadrática:
0 = x^2 - 12x + 10
Por lo tanto

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-12) \pm \sqrt{144 - 4(10)}}{2} = \frac{12 \pm \sqrt{144 - 40}}{2} = \frac{12 \pm \sqrt{104}}{2}$$

Por lo tanto

$$x = \frac{12+10}{2} \quad \text{o bien} \quad x = \frac{12-10}{2}$$

$$x = 11 \quad \text{o bien} \quad x = 1$$

Pueden hacerse 11 mochilas o bien 1 mochila con $40.

RAP 3.
Utiliza modelos en la solución de problemas que den lugar a ecuaciones cuadráticas o sistemas cuadráticas – lineal en su ámbito académico, personal y social.

EJEMPLO
Resolver las siguientes ecuaciones cuadráticas

$$x^2 - 3x + 2 = 0$$

$$x^2 = 4x$$

$$(x+7)(2x-3) = 0$$

$$3x^2 = 2x + 1$$

SOLUCIONES

El primer miembro de esta ecuación puede ser factorizado

$x^2 - 3x + 2 = 0$

$(x-2)(x-1) = 0$ El producto factorizado

Por lo tanto

(x – 2) = 0 o bien (x – 1) = 0 Por lo tanto uno de los factores debe ser 0

X = 2 o bien x = 1 Respuesta

Nota: Deseamos recordar una importante propiedad de los números reales que es útil para resolver ecuaciones cuadráticas.

PRINCIPIO DE PRODUCTOS CERO

Si a & b son numero reales, y si a*b = 0, entonces ya sea a = 0 o bien b = 0.

Nótese que hay 2 soluciones para esta ecuación cuadrática. Comprobaremos las soluciones sustituyéndolas en la ecuacion original.

Comprobación: x = 2 en $x^2 - 3x + 2$:

$2^2 - 3(2) + 2 = 0$:

$4 - 6 + 2 = 0$

Comprobación: x = 1 en $x^2 - 3x + 2 = 0$:

$1^2 - 3(1) + 2 = 0$

$1 - 3 + 2 = 0$

Ambas soluciones son correctas

Cuando tratamos de resolver una ecuación cuadrática factorizando, debemos tener todos los términos en un miembro de la ecuación y cero en el otro miembro.

$x^2 = 4x$

$x^2 - 4x = 0$ Se escriben todos los términos en un miembro & el producto es cero.

$x(x-4) = 0$

Por lo tanto

X = 0 o bien x – 4 = 0 Principio de productos cero.

X = 0 o bien x = 4 Respuesta. Compruébense las soluciones.

Precaución: Hay un común ejemplo en el 1b:

$x^2 = 4x$ Se dividen ambos miembros entre x.

x = 4 (Esto es incorrecto)

Cuando dividimos entre una variable o una expresión algebraica, debemos asegurarnos que no estamos dividiendo entre cero. De hecho, la solución x = 0 se pierde si usted divide ambos miembros entre x. Para minimizar la posibilidad de cometer un error, sugerimos que una ecuación cuadrática se escriba en la forma normal.

EJEMPLO

Una compañía de videojuegos para televisión tiene el siguiente costo total e ingreso total, donde *x* es el número de unidades de video:

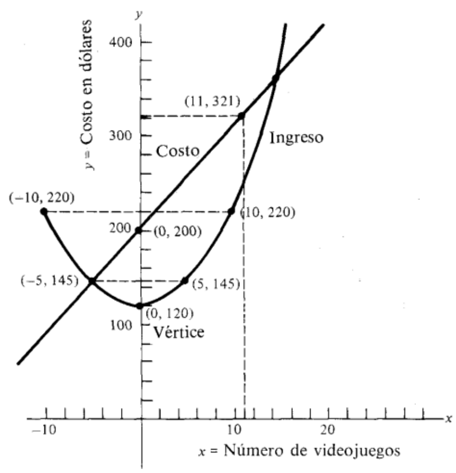
C = 11x + 200

R = 120 + x^2

El costo en dólares por producir *x* unidades es *C.* El ingreso en dólares obtenido por la venta de *x* unidades *es R.*
a. Trace la gráfica de ambas ecuaciones en el mismo sistema de ejes.
b. Halle los valores de "equilibrio" (sin pérdida ni ganancia) de *x,* esto es, el número de unidades que deben ser vendidas por el costo igual al ingreso.
c. ¿Cuántas unidades de video deben ser vendidas para tener ganancia?

Soluciones
a. La gráfica del costo es la línea recta con la forma .y = *mx + b, C* = 11*x* + 200 tiene pendiente 11 e intercepción y 200 (m = 11,6 = 200). Los puntos (0, 200) y (11, 321) están sobre la gráfica de la recta. La gráfica del ingreso es una parábola con la forma de $y = ax^2 + bx + c$. Utilizamos el procedimiento de tres pasos para obtener puntos sobre la parábola

1. El vértice para r = 120 + x^2 ocurre en *x* = *-b/(2a)* = -0/2 = 0. Cuando *x* = 0, *R* = 120. El vértice es el punto (0, 120).
2. Recorra 5 unidades a la izquierda y a la derecha del vértice para obtener una pareja de puntos simétricos.
Si *x* = 5, entonces $R = 120 + 5^2 = 145$.
Si x = -5, entonces $R = 120 + (-5)^2 = 145$.
Aquí (5, 145) y (-5, 145) son puntos simétricos. 3. Recorra 10 unidades hacia cada lado para obtener puntos de comprobación sobre la gráfica en (10, 200) y (-10, 220). La gráfica se muestra a continuación.



b. Los puntos de equilibrio (sin pérdida ni ganancia) ocurren cuando el ingreso es igual al costo. Estos son los puntos donde la recta y la parábola se intersecan. Podemos intentar hacer una estimación de dónde se cortan las gráficas estudiando la figura mostrada. Las gráficas se cortan cuando *x*= 15 y cuando *x*= - 5. Esta estimación por medio de la gráfica puede ser suficientemente buena para ciertas aplicaciones pero suponga que deseamos saber *exactamente* cuántos juegos de video deben ser vendidos para estar en equilibrio. Podemos hallar la solución *algebraicamente* resolviendo el sistema de ecuaciones.
C = 11x + 200 Ecuación 1
$R = 120 + x^2$ Ecuación 2
11x + 200 = 120 4- x^2
0 = x^2 - llx - 80
0 = (x - 16)(x + 5)
x = 16 o x = - 5

Las gráficas se intersecan *exactamente* cuando el número de unidades de video es 16 o bien - 5. La solución negativa no tiene significado en este caso. De modo que el punto de "equilibrio" ocurre cuando
x = 16, unidades de video. Cuando *x* = 16, el costo y el ingreso son los mismos:
C = 11(16) + 200 = $376
$R = 120 + (16)^2$ = $376

Las gráficas se intersecan en el punto (16, 376). También se cruzan en (-5, 145).

c. Para obtener una ganancia, la gráfica del ingreso debe estar por arriba de la gráfica del costo de tal forma que la compañía recibe más dinero del que paga. En la gráfica se ve que la compañía debe vender *más* de 16 unidades de video para obtener una ganancia, ya que si *x* es mayor que 16, entonces la parábola *está sobre* (entra más dinero) la recta del costo (que lo que sale).

EJEMPLO
Graficar cada uno de los siguientes sistemas y hallar su solución simultánea.

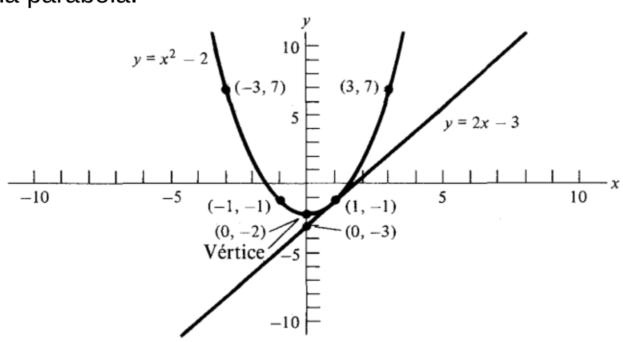
a. $y = 2x - 3$, $y = x^2 - 2$
b. $y = 4x^2 - 3x + 2$, $y = -2x + 7$
c. $y = 2x$, $y = x^2 + 2$

Soluciones

a. $y = 2x - 3$ es una recta, con pendiente + 2 y punto de intercepción en .y, (0, —3). El punto (1, — 1) está también sobre la recta.
$y = x^2 - 2$ es una parábola con su vértice en

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-0}{2} = 0$$

Así el vértice es (0, —2). La pareja (1, — 1) y (— 1, —1) son puntos simétricos sobre la gráfica. La pareja (3, 7) y (-3, 7) están también sobre la parábola.



En la gráfica anterior, se ve que la recta y la parábola se intersecan en solamente *un* punto. Esto sugiere que el sistema puede tener solamente una solución algebraica. Comprobemos. Utilizando la sustitución ponemos $y = 2x$ — 3 en la segunda ecuación y obtenemos

$$\mathbf{2x - 3 = x^2 - 2}$$
$$\mathbf{0 = x^2 - 2x + 1}$$
$$\mathbf{0 = (x - l)(x - 1)}$$

Por lo tanto $x = 1$. De hecho, solamente hay una solución para este sistema, el punto (1, -1).

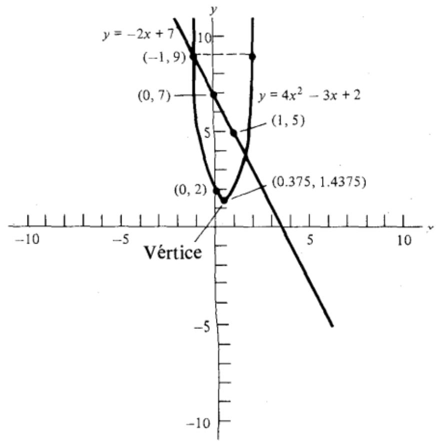
1. $y = 4x^2 - 3x + 2$ es una parábola con vértice en

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-(3)}{8} = \frac{3}{8} = 0.375$$

Cuando x = 0.375, $y = 4(0.375)^2 - 3(0.375) + 2 = 1.4375$. El vértice de esta parábola está en el punto (0.375, 1.4375).

2. Para hallar puntos simétricos sobre la parábola, será *conveniente* recorrer 0.375 unidades a la izquierda y a la derecha del vértice.
Si $x = 0$ o bien $x = 0.750$, entonces $y = 2$.
Si $x = -1$ o bien $x = 1.750$, entonces $y = 9$.

La otra ecuación de este sistema, $y = -2x + 7$, es una recta, con pendiente —2, intercepción en *y* (0, 7). El punto (1, 5) está también sobre la recta.

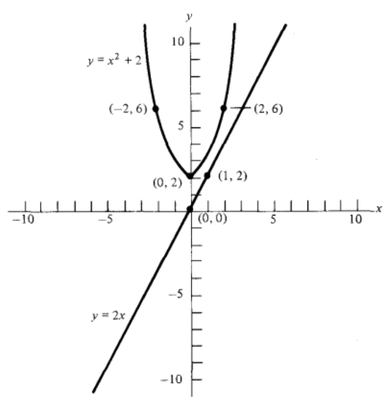


Para hallar algebraicamente las dos soluciones, utilizamos el método de sustitución:
$4x^2 - 3x + 2 = -2x + 7$
$4x^2 - x - 5 = 0$

Podríamos utilizar la ecuación cuadrática para hallar la solución. Como *a* = 4, *b* = — 1 y c = —5, las soluciones son

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(4)(-5)}}{8} = \frac{1 \pm \sqrt{81}}{8} = \frac{1 \pm 9}{8} = -1 \quad \text{o bien} \quad \frac{10}{8}$$

Las soluciones son *x* = — 1 y *x* = 5/4. (También pudimos haber hallado estas soluciones factorizando.) Cuando *x* = -1, *y* = 9. Cuando *x* = 5/4, *y* = *9/2* De este modo las soluciones simultáneas son (— 1, 9) y (5/4, 9/2).
c. *y* = *2x* es la ecuación de una recta con pendiente 2 e intercepción en *y* (0, 0). El punto (1, 2) está también sobre la recta. La ecuación $y = x^2 + 2$ es una parábola con vértice en (0, 2), ya que *b* = 0. Los puntos simétricos sobre la parábola son (2, 6) y (-2, 6) como lo son también (3, 11) y (-3, 11). Las gráficas de estas dos ecuaciones se muestran enseguida.



Nótese que las dos gráficas *no* se intersecan. ¿Qué es, entonces, la solución simultánea? Se ve que *no hay solución simultánea* para este sistema. Veamos que sucede si tratamos de resolver tal sistema algebraicamente:

y — 2x
$\boldsymbol{y = x^2 + 2}$

Utilizando sustitución,
$2x = x^2 + 2$
$0 = x^2 - 2x + 2$

Utilizando la fórmula cuadrática

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{4 - 4(2)(1)}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 8}}{2} \quad \text{o bien} \quad \frac{2 \pm \sqrt{-4}}{2}$$

EJEMPLO
Hallar algebraicamente las soluciones de estos sistemas.

a. $y = x^2 - 5x + 1$
$y = 2x^2 + 3x - 7$

b. $y = 6 - x^2$
$y = -3x + 15$

Soluciones
a. Utilizando sustitución,
$2x^2 + 3x - 7 = x^2 - 5x + 1$
$x^2 + 8x - 8 = 0$

Utilizando la fórmula cuadrática, a = l,b = 8 y c = -8. Por lo tanto las soluciones son:

$$x = \frac{-8 \pm \sqrt{64 - 4(1)(-8)}}{2} = \frac{-8 \pm \sqrt{64+32}}{2} = \frac{-8 \pm \sqrt{96}}{2} = \frac{-8 \pm 9.80}{2} = \frac{1.80}{2} \quad \text{o bien} \quad \frac{-17.80}{2}$$

Así $x = 0.90$ o bien $x = -8.90$.
Cuando $x = 0.90$, $y = (0.90)^2 - 5(0.90) + 1 = -2.69$

Cuando $x = -8.90$,
$y = (-8.90)^2 - 5(-8.90) + 1 = 124.71$

De este modo las soluciones son (0.90, —2.69) y (-8.90, 124.71) (dos cifras decimales de exactitud). El hecho de que haya dos soluciones algebraicas para este sistema de ecuaciones indica que las gráficas de las dos parábolas se intersecan en dos lugares.

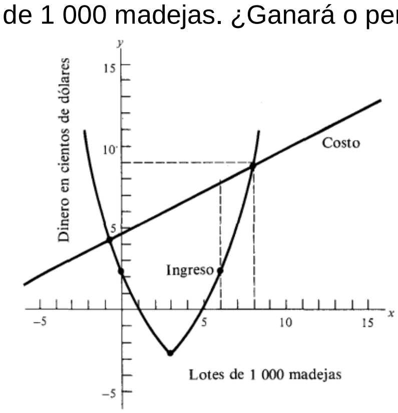
b. $y = 6 - x^2$
$y = -3x + 15$

Por lo tanto
$6 - x^2 = -3x + 15$
$0 = x^2 - 3x + 9$

$$x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4(1)(9)}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{27}}{2} = \frac{3 \pm 3\sqrt{3}i}{2}$$

EJEMPLO

a. Hallar los puntos donde no hay equilibrio cuando el costo es igual al ingreso, a partir de la siguiente gráfica de las funciones de costo e ingreso para un proceso de manufactura de hilo.
b, ¿Cuántos lotes de 1 000 madejas deben ser producidos para obtener una ganancia?
c. ¿Suponga que se producen 6 lotes de 1 000 madejas. ¿Ganará o perderá dinero la compañía?



Soluciones
a. Los puntos de equilibrio son los lugares donde el costo es igual al ingreso. En la gráfica se ve que estos puntos están cerca de (—1, 425) y (8, 900).

b. Deben producirse más de ocho lotes de 1 000 madejas para que la compañía tenga una ganancia. La gráfica del ingreso está sobre la gráfica del costo a partir de 8.
c. En seis lotes, la gráfica del costo está sobre la gráfica del ingreso. Esto indica que el costo excede al ingreso para seis lotes, así que la compañía perderá dinero.

EJEMPLO
La suma de dos números es 19 y su producto es 72. ¿Cuáles son los números?

Solución
Supongamos que *x* es el primer número y *y* el segundo. ¿Qué sabemos acerca de *x* y *y?* Su suma debe ser igual a 19, así que $x + y = 19$. Además su producto debe ser igual a 72. Así que $(x)\ (y) = 72$. Esto nos da un *sistema* de ecuaciones con dos incógnitas.

$x + y = 19$ o bien $y = 19 - x$ Ecuación 1
$xy = 72$ Ecuación 2

Supóngase que sustituimos el valor de *y* de la ecuación 1 en la ecuación 2.

$x(19 - x) = 72$
$19x - x^2 = 72$
$0 = x^2 - 19x + 72$

$$x = \frac{19 \pm \sqrt{(19)^2 - 4(1)(72)}}{2} = \frac{19 \pm \sqrt{361-288}}{2} = \frac{19 \pm \sqrt{73}}{2} = \frac{19 \pm 8.54}{2}$$

Por lo tanto

$x = 13.77$ o bien $x = 5.23$
Si $x = 13.77$, .$y = 19 - 13.77 = 5.23$.
Si $x = 5.23$, $y = 19 - 5.23 = 13.77$.

De este modo los dos números son
$x = 5.23$ $y = 13.77$ Respuesta.

EJEMPLO
Usted manejó 40 millas a la casa de sus padres para ir a cenar. Tardó 20 minutos menos en regresar que lo que hizo para llegar a la hora de la salida del trabajo, debido a que podía manejar 10 mph más rápido en su camino a casa. ¿Qué tan rápido manejó en cada camino?

Solución
Necesitamos utilizar el modelo Distancia = velocidad x tiempo
Sea *r* la velocidad hacia la casa de sus padres y *t* el tiempo. Manejando *hacia* la casa de sus padres
$40 = rt$ Ecuación 1

Manejando *desde* de la casa de sus padres
$40 = (r+10)\left(t - \frac{1}{3}\right)$ Ecuación 2

$$t = \frac{40}{r}$$

$$40 = (r+10)\left(\frac{40}{r} - \frac{1}{3}\right)$$

$$40 = 40 - \frac{r}{3} + \frac{400}{r} - \frac{10}{3}$$

$$(3r)40 = (3r)\left(40 - \frac{r}{3} + \frac{400}{r} - \frac{10}{3}\right)$$

$120r = 120r - r^2 + 1\ 200 - l0r$
$0 = r^2 + l0r - 1\ 200$

0 = (r + 40)(r - 30)
r = - 40 mph o bien   r = 30 mph

Respuesta:
r = 30 mph a la casa de sus padres
r = 10 = 40 mph de regreso

EJERCICIOS

1. Halle las soluciones de cada una de las siguientes ecuaciones cuadráticas:

   a. $9x^2 + 16 = 0$
   b. $0.2x^2 - 0.6x + 1 = 0$
   c. $0.25x - 0.75x^2 = 0.8$
   d. $(3x + 2)^2 - x^2 + 7 = (x + 5)^2 - 2x$
   e. $(x - 4)^2 + 49 = 0$
   f. $x^2 = 17x - 8$
   g. $(3 - 2x)^2 + (x - 7)^2 = 20$

2. Resuelva los siguientes sistemas cuadráticos

   a) $\begin{matrix} x^2 + 2y - y + 4 = 0 \\ 3x - y + 6 = 0 \end{matrix}$

   b) $\begin{matrix} x^2 - 6x - y + 5 = 0 \\ 2x - y - 7 = 0 \end{matrix}$

   c) $\begin{matrix} 6x - x^2 - y = 0 \\ x^2 - 2x - y = 0 \end{matrix}$

   d) $\begin{matrix} x^2 - 3x + 2 - y = 0 \\ x^2 - 4x + 3 - y = 0 \end{matrix}$

   e) $\begin{matrix} x^2 + y = 3 \\ 5x + y = 7 \end{matrix}$

Problemas sobre ecuaciones y funciones cuadráticas

1. ¿Cuál es la altura del árbol más alto que puedes asegurar con un cable de 250 m? El cable debe fijarse al suelo a una distancia de la base del árbol que sea al menos 10 m.

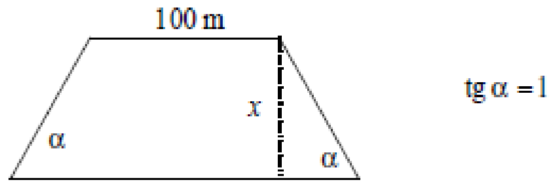
2. ¿Cuáles son las dimensiones de un rectángulo si su área es 1500 m^2 y su longitud es 20 m más que su anchura?

3. Calcula la altura h del triángulo si su área es 162 cm^2 y su base es (2h+3) cm.

4. Calcula el perímetro del rectángulo de base w+4, altura w y área de 96 m^2.

5. La longitud de una pista rectangular de patinaje sobre hielo es 20 m mayor que el doble de su ancho. Calcula las dimensiones de la pista si se sabe que su área es de 6,000 m^2.

6. En la figura se muestra la sección del terraplén de una autopista. La altura del terraplén es de x metros y su anchura en su parte alta es de 100 m. Obtén:



7. Una fórmula para el volumen de tierra que se requerirá para construir una sección recta de 100 m de la autopista, en metros cúbicos.
   a. ¿Cuál es la altura del terraplén si el área de su sección es de 525 m^2?
   b. ¿Qué cantidad de viajes se requerirá hacer para construir el tramo de 100 m, si cada camión transporta 10 m^3 de tierra?

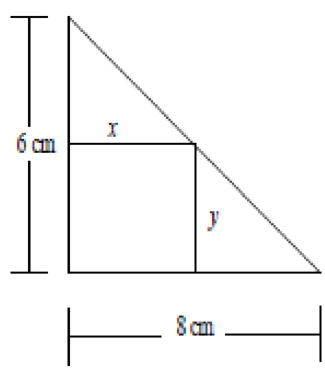
8. Rodolfo acostumbra subir corriendo dos escaleras eléctricas de 20 m de longitud cada una, desplazándose la primera hacia arriba y la segunda hacia abajo, en 15 segundos. Si se mantuviese quieto en una de las escaleras, en 20 segundos se encontraría en el otro extremo de ella. Cuando las escaleras no funcionan, ¿en cuánto tiempo subirá por ellas?

9. El siguiente problema fue descubierto en los escritos del matemático hindú Mahavira (c. 850): La cuarta parte de un hato de camellos fue vista en el bosque, el doble de la raíz cuadrada del total de camellos del hato se fue a las laderas de la montaña, y tres veces cinco camellos fueron vistos en la orilla de un río. ¿Cuál es la medida numérica del hato de camellos?

10. Una escalera de 13 metros de longitud está recostada contra una pared. La base de la escalera se encuentra a 5 metros del muro. ¿Cuánto habría que desplazar la base de la escalera para que la punta superior de la misma se desplazase hacia abajo la misma distancia?

11. El ingenioso Heberto ha diseñado su bicicleta con ruedas de distinto diámetro, de forma que la delantera mide 40 cm menos que la trasera en su circunferencia exterior. Al dar un paseo en bici se da cuenta de que por cada 12 m de recorrido, la rueda delantera da 5 vueltas más que la trasera. ¿Cuáles son los diámetros de cada rueda?

12. Un rectángulo con un área de 12 cm^2 se inscribe en un triángulo rectángulo, como se muestra en la figura. ¿Cuáles son sus dimensiones?

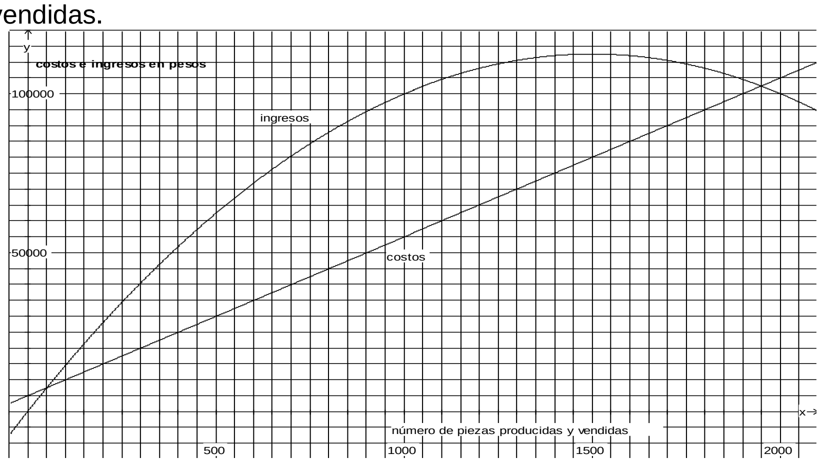


13. El peso de un objeto varía inversamente con el cuadrado de la distancia al centro de la Tierra. Al nivel del mar (6,400 km del centro de la Tierra) un astronauta pesa 100 kg. Calcula el peso del astronauta en un vehículo espacial a 200 km de la superficie terrestre.

14. Un cultivador de naranjas se da cuenta de que obtiene una producción promedio de 40 costales por árbol cuando planta 200 de ellos en una hectárea de terreno. Cada vez que añade diez árboles a la hectárea, la producción por árbol desciende un costal. ¿Cuántos árboles por hectárea debería plantar para optimizar la producción?

15. Un consejo municipal utiliza 200 m de valla para cercar un parque destinado a los ciudadanos minusválidos. El parque será adyacente a un centro comunitario y tendrá dos áreas rectangulares conectadas por un puente que atraviesa un arroyo que se encuentra a 10 m del edificio. El área adyacente al centro comunitario puede tener una longitud no mayor a la del edificio, que es de 75 m, pero el área a lo largo del arroyo puede tener cualquier dimensión. Junto al río no se pondrá ninguna valla. ¿Cuál es el área máxima que pueden cercar?

16. En la gráfica se representan los costos e ingresos de un fabricante de pantalones en función del número de piezas producidas y vendidas.



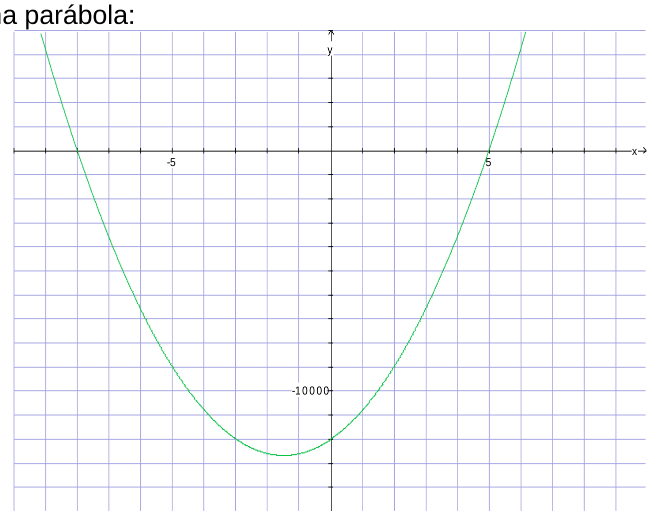
a) ¿Cuáles son los costos, los ingresos y la ganancia por producir y vender 0, 200, 800 y 2000 pantalones?
b) Determina las ecuaciones de los costos y los ingresos.
c) Dado que la ganancia es la diferencia de los ingresos y los costos, determina la ecuación de la ganancia a partir de las que obtuviste en el inciso anterior.

17. Una niña lanza una piedra hacia arriba, la altura ‘y’, en metros, después de ‘t’ segundos está dada por la fórmula

$$y = 10t - 4.9t^2$$

a) ¿A qué altura se encuentra después de 2 segundos?
b) ¿En qué instante alcanza una altura de 4 metros?

18. La curva siguiente es una parábola:



a) ¿Cuál es la ecuación que corresponde a esta gráfica?
b) Escribe un algoritmo que sirva para resolver el problema ‘Dada la gráfica de una parábola encuentra su ecuación’.
c) Traza sobre los mismos ejes la gráfica de y = -1500x - 4000.

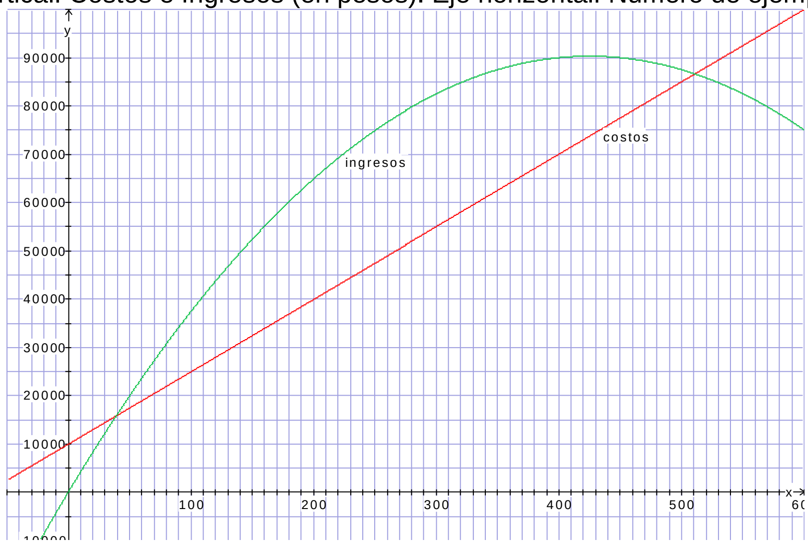
d) Encuentra los puntos de intersección de ambas gráficas.
e) Traza sobre los mismos ejes la gráfica de $y = 200(x^2-3x-40)$.
f) Encuentra los puntos de intersección de la recta y esta parábola.

PROBLEMAS EXTRAS

1. "Ifigenia Cruel" de Alfonso Reyes

En la gráfica se muestran los costos de edición y los ingresos por la venta de una edición facsimilar del poema dramático de Alfonso Reyes, 'Ifigenia Cruel'.

Eje vertical: Costos e Ingresos (en pesos). Eje horizontal: Número de ejemplares.



CUESTIONARIO
(1) ¿Cuáles son los costos, los ingresos y la ganancia por producir y vender 0, 100, 200, 350, 550 y 600 ejemplares?
(2) ¿Dentro de qué límites se debe mantener la oferta para obtener ganancias?
(3) ¿Cuál debe ser la oferta para obtener el mayor ingreso?
(4) ¿A cuánto ascienden los costos fijos de producción?
(5) ¿Cuánto cuesta producir cada libro si no se consideran los costos fijos?
(6) ¿Hay una ganancia máxima? Justifica tu respuesta. Si hay una ganancia máxima, calcúlala.
(7) ¿Cuál es la ecuación de los costos?
(8) ¿Cuál es la ecuación de los ingresos?
(9) ¿Cuál es la ecuación de la ganancia?
(10) Traza la gráfica de la ganancia en los mismos ejes.
(11) Plantea tres preguntas sobre esta misma situación y respóndelas.
(12) Si se reducen los costos, tanto los de producción da cada libro como los fijos, a $8500 y $120, respectivamente, ¿cuál es la ganancia máxima?

2. La cajita perenne

Se puede hacer una caja abierta de un pedazo rectangular de cartulina, recortando un cuadrado de lado x en cada esquina y doblando las pestañas que resultan hacia arriba.
Si, por ejemplo, la cartulina mide 30 cm por 40 cm, encuentra las dimensiones de la caja que tiene el volumen máximo.

Cuestionario

(1) Haz un esquema o dibujo que represente la situación del problema.
(2) Relaciona las características de la figura plana y las correspondientes de la caja,
(3) Escribe la fórmula que te permite calcular el volumen de la caja identificando lo que representa cada letra y sus unidades. Identifica las dimensiones de la base de la caja y la altura,
(4) Haz una tabla que contenga el lado del cuadrado que cortas en cada esquina y el volumen correspondiente.
(5) Aplica la estrategia de la lupa en la región que parece contener el volumen máximo.

(6) Repítela hasta que obtengas un valor del lado y que sea del orden de milésimos.
(7) Traza una gráfica con x en el eje horizontal y el volumen en el eje vertical.
(8) ¿Cómo verificas que el volumen que obtuviste es el máximo? Explica.
(9) ¿Qué aprendizajes utilizaste para resolver el problemas?
(10) En caso de no haberlo resuelto, escribe tus conclusiones, con una reflexión sobre ¡as causas de que no lo hayas podido resolver.
(11) ¿Qué caminos o estrategias seguiste para tratar de resolver el problema?
(12) Aplica el modelo PER (Propósito, Estrategia, Resultado).

3. Qué diferencias, ¡ay! tan finitas

¿Cuál es la regla?

Para cada una de las siguientes sucesiones escribe los siguientes tres términos y el n-ésimo término

(1) 3, 12, 27, 48, 75, , , , … ,
(2) 2, 7, 16, 29, 46, , , , … ,

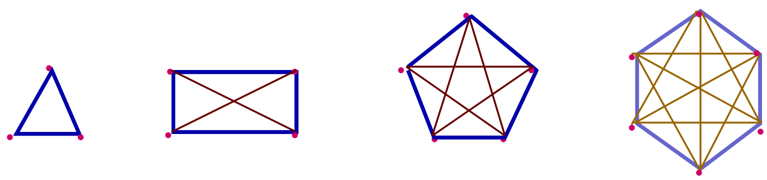
¿Cuál es la suma?

¿Cuántas sumas puedes encontrar para las siguientes series? Expresa tu respuesta como una regla general. Prueba tu regla cuando n = 1, n = 2 , etc

(3) 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + … + (n + 2) =
(4) 1 + 5 + 9 + 13 + 17 + … + (4n - 3) =

Diagonales de un polígono

Una diagonal de un polígono es un segmento de recta que une cualesquier dos vértices no adyacentes. Aquí, n representa el número de lados del polígono.
(5) Encuentra la regla general para hallar el número de diagonales de un polígono de n lados.



n =3 n = 4 n = 5 n = 6

Sugerencia: Haz una tabla de dos columnas, en la primera coloca el número de lados del polígono y en la otra el número de diagonales del polígono dado. Completa la tabla hasta un polígono de nueve lados. ¿Cómo encontraste el patrón?

¿Cuál es la fórmula?

(6) ¿Cuál es la fórmula que expresa la relación que hay entre p y t, tal como se muestra en la tabla siguiente?, ¿qué valor le corresponde a p cuando t es 6?

t	0	1	2	3	4
p	100	90	70	40	0

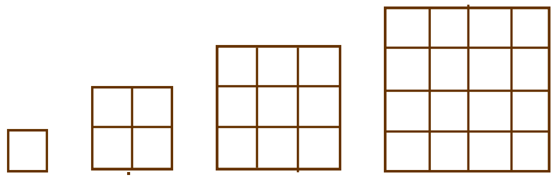
Regiones de un círculo

Una cuerda es un segmento de recta que une dos puntos de una circunferencia. Aquí, n es el número de cuerdas.
(7) Encuentra la regla general que da el número de regiones formadas por n cuerdas.

n = 0 *n* = 1 *n* = 2 *n* = 3

Utiliza la sugerencia del problema anterior.

Cuadrados de un cuadrado
Un cuadrado grande puede dividirse en muchos cuadrados más pequeños. En este problema, asegúrate de contar todos los cuadrados, pero no cuentes rectángulos que no sean cuadrados. Aquí, n representa el número de unidades en un lado del cuadrado grande.
(8) Expresa como regla general el número de cuadrados que hay en un cuadrado de n x n.



$n = 1$ $n = 2$ $n = 3$ $n = 4$

Si n = 1, hay 1 cuadrado.
Si n = 2, hay 5 cuadrados
Si n = 3 , hay 14 cuadrados.
... etcétera

Utiliza la sugerencia dada para el problema de las diagonales.

BIBLIOGRAFÍA.

Algebra con aplicaciones
Phillips, Elizabeth P. y Butts, Thomas y Shaughnessy, Michael
Editorial OXFORD
Edición 2005

Álgebra, Libro del Estudiante
Academia Institucional de Matemáticas
Editorial IPN
1era Edición, 2005.

PÁGINAS WEB DE CONSULTA.

Ecuaciones
http://www.vitutor.net/1/10.html

Sistema de ecuaciones
http://www.vitutor.net/1/36.html

Ecuaciones y Sistemas
http://www.aulamatematica.com/BC1/01_Reales/Reales_index01.htm

Ecuación de segundo grado y aplicaciones
http://recursostic.educacion.es/descartes/web/materiales_didacticos/Ecuacion_de_segundo_grado/index.htm

Funciones. Expresión gráfica y verbal
http://recursostic.educacion.es/descartes/web/materiales_didacticos/Interpretacion_graficas/Indice_graficas.htm

Ecuación de segundo grado. Solución gráfica y algebraica
http://recursostic.educacion.es/descartes/web/materiales_didacticos/Ecuacion_segundo_grado/index.htm

EXAMEN FINAL DE ÁLGEBRA

1. Calcular la siguiente operación:

$$3 + 2 - 4 \div 2 =$$

a) $-\frac{1}{2}$ b) 3 c) $\frac{1}{2}$ d) -3

2. Se va a cercar un terreno rectangular que mide 25 por 40 m. Si cada metro lineal de barda cuesta $115.00, ¿Cuánto costara cercar todo el terreno?

a) $7475 b) $8125 c) $14950 d) $ 12820

3. Reducir el siguiente polinomio:

$$-71a^3b - 84a^4b^2 + 50a^3b + 84a^4b^2 - 45a^3b + 18a^3b$$

a) $-48a^3b$ b) $-48a^3b - a^4b^2$ c) $48a^3b + a^4b^2$ d) $48a^3b$

4. Juan gana dos tercios de lo que percibe Pedro, quien gana 4/5 de lo que percibe Tadeo. Si Tadeo gana $1,150.00, ¿cuánto perciben Juan y Pedro?

a)	b)	c)	d)
Tadeo: $ 1150.00	Tadeo: $ 1150.00	Tadeo: $ 1000.00	Tadeo: $ 1150.00
Pedro: $ 460.00	Pedro: $ 920.00	Pedro: $ 766.66	Pedro: $ 613.33
Juan: $ 306.66	Juan: $ 613.33	Juan: $ 613.33	Juan: $ 920.00

5. Un viajero recorre 1/4 de la distancia entre dos ciudades a pie, 1/5 a caballo, 1/8 del resto en auto y los 55 km restantes en tren. ¿Cuál es la distancia entre las dos ciudades?

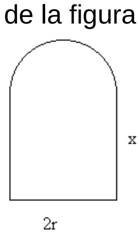
a) 114.28 km b) 120.22 km c) 112.12 km d) 109.28 km

6. Reducir la siguiente expresión:

$$2a + 3b - \{2a + [b - a]\}$$

a) 4b b) 4a – 2b c) –a – 2b d) 2a + 4b

7. Una ventana con un perímetro de 8 m tiene la forma de un rectángulo con un semicírculo sobrepuesto. Escribe un polinomio para representar el área de la figura en términos solamente de la variable *x*.



a) $A_T = \frac{(x+4)(4x+\pi)}{2-\pi}$ b) $A_T = \frac{(x-4)(4x+\pi)}{4-\pi}$ c) $A_T = \frac{-(x-4)(4x+\pi)}{4-\pi}$ d) $A_T = \frac{-(x+4)(4x-\pi)}{\pi}$

8. Un automóvil recorre 50 km en el mismo tiempo en que un avión recorre 180 km. La velocidad del avión es de 143 km/h mayor que la del automóvil. Calcula la velocidad del automóvil.

a) V_{AUTO} = 45 Km/h b) V_{AUTO} = 60 Km/h c) V_{AUTO} = 55 Km/h d) V_{AUTO} = 48 Km/h

9. Calcula el valor de x:

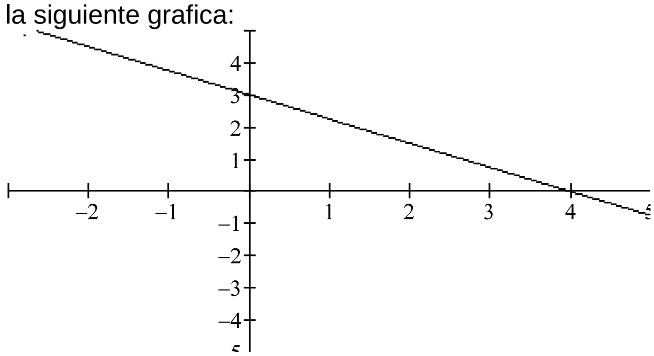
$$\frac{2x-1}{x+4} = \frac{6x-3}{3x+2}$$

a) x =2 b) $x = -\frac{1}{2}$ c) $x = \frac{1}{2}$ d) $x = \frac{1}{3}$

10. Un televisor tiene un costo de $3,250.00, incluyendo el IVA del 15%. ¿Cuál es el precio del televisor sin IVA?

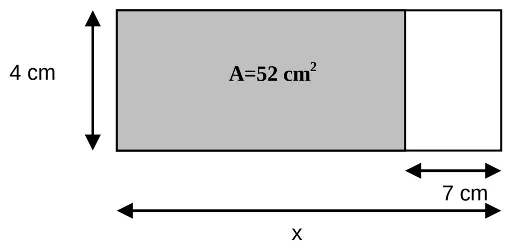
   a) $ 2826.1 b) $ 3737.5 c) $ 2762.5 d) $ 2781.9

11. ¿Cuál es la ecuación de la siguiente grafica:



   a) $y = \frac{3}{4}x + 3$ b) $y = -\frac{3}{4}x + 3$ c) $y = -\frac{3}{4}x$ d) $y = \frac{3}{4}x + 4$

12. Encontrar el valor de x:

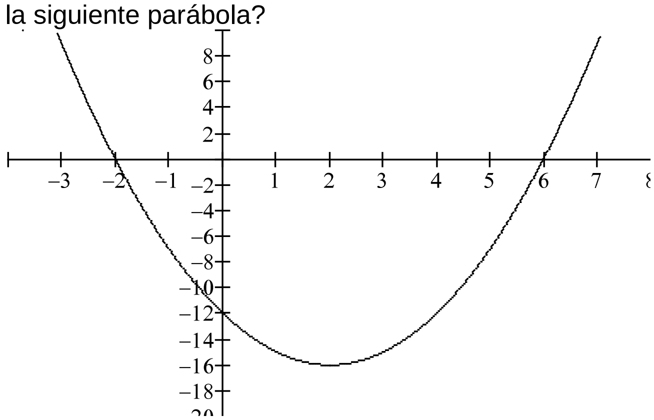


   a) x = 6 b) x = 8 c) x = 10 d) x = 20

13. Calcula el perímetro del rectángulo de base w+4, altura w y área de 96 m2.

   a) P = 40 m b) P = 38 m c) P = 50 m d) P = 42 m

14. ¿Cuál es la ecuación de la siguiente parábola?



   a) y = (x - 2)(x - 6) b) y = (x + 2)(x - 6) c) y = (x + 2)(x + 6) d) y = (x - 2)(x + 6)

15. Resolver las soluciones para la siguiente ecuación cuadrática:

$$x^2 - 3x + 2 = 0$$

   a) $x_1 = 2$, $x_2 = 1$ b) $x_1 = -2$, $x_2 = -1$ c) $x_1 = -2$, $x_2 = 1$ d) $x_1 = 2$, $x_2 = -1$

16. Encontrar dos números consecutivos tales que la suma de sus cuadrados es 85.

   a) 4 y 5 b) 6 y 7 c) 7 y 8 d) 5 y 6

17. Resolver el siguiente sistema de ecuaciones.

$$2x - 3y = 7$$
$$5x - 5y = 14$$

a) $x = \frac{91}{29}; \quad y = -\frac{7}{29}$ b) $x = -\frac{91}{29}; \quad y = -\frac{385}{87}$ c) $x = -7; \quad y = -7$ d) $x = 91; \quad y = \frac{175}{3}$

18. Un rectángulo tiene 92 cm de perímetro y su diagonal mide 34 cm. Halla sus lados.

a) l = 20 cm
a = 26 cm

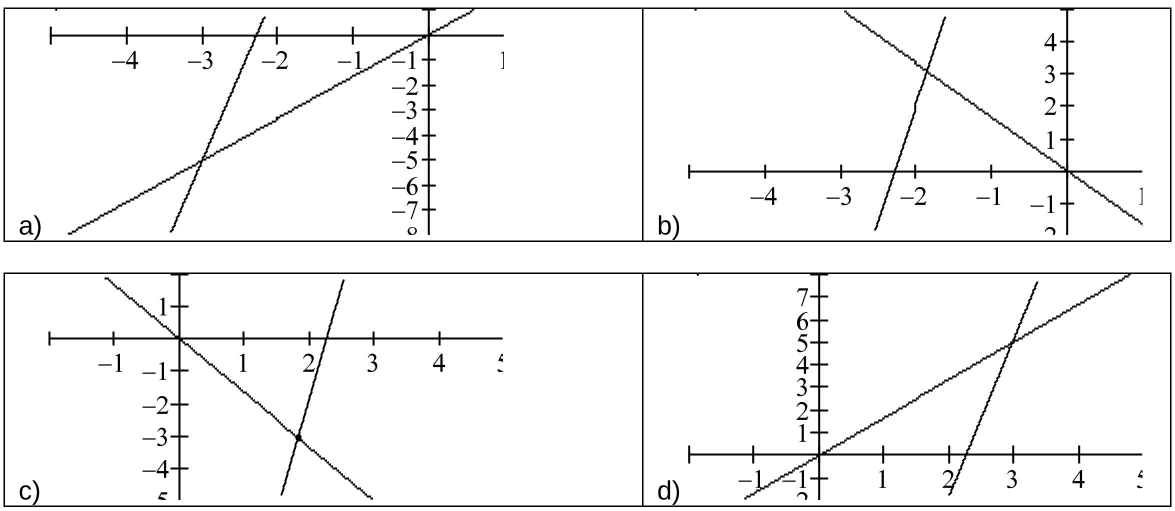
b) l = 13 cm
a = 33 cm

c) l = 19 cm
a = 27 cm

d) l = 16 cm
a = 30 cm

19. Cuál es la solución de la siguiente gráfica del siguiente sistema.

$$5x - 3y = 0$$
$$7x - y = -16$$



20. Resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$x + y - z = 1$$
$$x - y + z = 3$$
$$7x + y + z = 7$$

a) x = -2 y = 5 z = 8	b) x = -2 y = -5 z = 2	c) x = 2 y = 5 z = 4	d) x = -2 y = 5 z = -6